

Informations:

Examen écrit 4h - Chamilo

Exercices: mardi-midi en cours ou mardi-soir casier (assistant)

De temps en temps: Test Ecrit

1. Séries Numériques

But: Si $a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) on veut définir et (calculer)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$
1.1 Définition:

Déf: Si $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ alors on dit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge vers $s \in \mathbb{R}$ ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$ où

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Dans ce cas on écrit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

Propriétés:

• Linéarité: 1 Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergent alors $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2 si $\lambda \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

• Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Preuve: Si $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =: s$

alors $a_n = S_n - S_{n-1}$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = s - s = 0$$

$\Delta \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

dit seulement que cela est possible

Déf: La convergence d'une suite dans $\mathbb{C}$

Si $c_1, c_2, c_3, \dots \in \mathbb{C}$ et si $c \in \mathbb{C}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$

ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n - c| = 0$

Si $c_n = a_n + ib_n$ ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$) alors $\lim c_n = \lim (a_n + ib_n)$

$$= \lim a_n + i \lim b_n$$

Ex: (Série géométrique)

Soit $q \in \mathbb{C}$ $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ est appelée une série géométrique

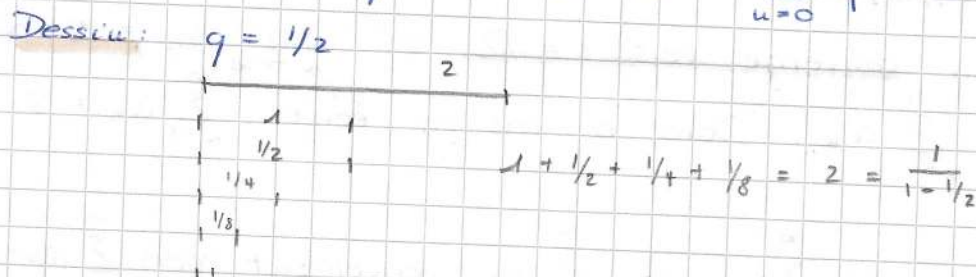
Si $|q| \geq 1$ alors $|q^n| = |q|^n \geq 1$ et donc $\lim q^n \neq 0$
 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ne converge pas.

Si $|q| < 1$ si $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q} q^{n+1}$$

$$= \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}}_0 = \frac{1}{1 - q}$$

Donc si $|q| < 1$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$



Déf: Convergence absolue

Si $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$, on dit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Théorème: Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Δ c'est une série Δ

Preuve: Si $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ et si $t_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$

il faut montrer que (t_n) converge $\Rightarrow (S_n)$ converge.

Rappel une suite c_n converge $\Leftrightarrow$ elle est de Cauchy

Suite de Cauchy: $\forall \epsilon > 0, \exists N_0, \forall n, m \geq N_0, |c_n - c_m| < \epsilon$

Si t_n converge, elle est de Cauchy: $|t_m - t_n| < \epsilon$

$$|t_m - t_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \epsilon \quad (\text{par l'inégalité } \Delta)$$

$$\sum_{k=n+1}^m |a_k| \geq \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| = |S_m - S_n| < \epsilon \Rightarrow \text{la suite } S_n \text{ est de Cauchy et donc elle converge.}$$

Ex: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$

mais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge et la convergence n'est donc pas absolue.

Problème: pour $a_1, a_2, \dots$ donnée déterminer si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

observation: si a_1, a_2 sont positifs ($\forall a_n \in [0; \infty)$) alors

$S_n (= a_1 + \dots + a_n)$ est une suite croissante et donc:

soit (S_n) est bornée donc elle converge ou

soit (S_n) n'est pas bornée $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

et donc soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

1.2 Comparaison avec une intégrale: (Méthode)

Si $a > 0$, est-ce que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge?

Théorème: Soit $f: [1; \infty) \rightarrow [0; \infty)$ une fonction décroissante.

Alors $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge ssi $\int_1^{\infty} f(x) dx$ converge.

Ex: $f(x) = \frac{1}{x^a}$ $a > 0$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-a}}{1-a} \right]_1^n$ converge ssi $a > 1$

pour $a=1$ ou $a \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [\log x]_1^n = \infty$ ($\log x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$)

Thm $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ converge $\Leftrightarrow a > 1$

Preuve:

$$f(n+1) = \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx = f(n)$$

$$\sum_{n=1}^m f(n) \leq \int_1^{m+1} f(x) dx \leq f(1) + \sum_{n=2}^m f(n)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^m f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

Ex: $a > 0$ est-ce que $\sum_n \frac{1}{n(\log n)^a}$ converge ? (série 1)

1.3 Comparaison avec une autre série (Méthode)

On sait déjà que $\sum q^n$ converge pour $|q| < 1$

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$

Est-ce que $\sum \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge ?

Proposition: Si $0 \leq a_n \leq b_n$ $n = 1, 2, \dots$
et si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Preuve: $0 \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k$ $\lim_{n \rightarrow \infty}$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$
et donc si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ ▮

Théorème: Soient $a_n \in \mathbb{C}$ $n = 1, 2$ et $b_n \in (0, \infty)$ $n = 1, 2, \dots$
Si la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ est bornée c-à-d si $\exists c > 0$ $|\frac{a_n}{b_n}| \leq c$ ($\forall n$)
et si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument

Preuve: on a $0 \leq |a_n| \leq c \cdot b_n$ $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c b_n = c \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge
 $\Rightarrow \sum |a_n|$ converge, c-à-d $\sum a_n$ converge absolument ▮

Théorème: Critère de la limite

Soient $a_n \in \mathbb{C}$, $b_n \in (0, \infty)$ $n = 1, 2, \dots$

Supposons $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe. Alors si $\sum b_n$ converge

ou a $\sum a_n$ qui converge absolument.

(Et donc si $\sum a_n$ diverge alors $\sum b_n$ diverge)

Preuve: la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge, donc elle est bornée et donc
on peut utiliser le théorème précédent ▮

Ex: $\sum \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1/n^2} = 1$

Rappel: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge

Analyse I:

Ex:

$$\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ divergeAnalyse I:

1e 21.02.18

Théorème: critère du quotientSoit $a_1, a_2, \dots$ une suite de nombres complexes• Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ alors $\sum a_n$ converge absolument• Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ alors $\sum a_n$ divergePreuve:• Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ choix de q tq $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q < 1$ alors $\exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$ on a $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$ on a donc $|a_{n_0+1}| < q |a_{n_0}|$ $|a_{n_0+2}| < q |a_{n_0+1}| < q^2 |a_{n_0}|$ $|a_{n_0+k}| < q^k |a_{n_0}|$ on a $0 \leq q < 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_0+k}|$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument.• Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ choix de q tq $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > q > 1$ $|a_{n_0+k}| > q^k |a_{n_0}| \Rightarrow |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \rightarrow \sum a_n$ diverge.

Ex:

• soit $x \in \mathbb{C}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0 < 1$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.• $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} \right)$ $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la série converge absolument.• $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ on ne peut rien dire.Rappel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$ est le plus grand point d'accumulation de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$

Théorème: Critère de la racine

Soient $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$ si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ alors $\sum a_n$ converge absolument
si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ alors $\sum a_n$ diverge.

Preuve:

• si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ soit q tq $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$
pour un n suffisamment grand on a $\sqrt[n]{|a_n|} < q$
et donc $|a_n| < q^n \quad \forall n > n_0$ (posé au préalable) comme $q < 1$
on a $|a_n| < q^n < 1 \quad \sum q^n < \infty$ et donc $\sum |a_n|$ converge

• si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ soit q tq $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > q > 1$
 $\exists$ unubr infini de n tq $\sqrt[n]{|a_n|} > q \quad |a_n| > q^n > 1$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty \Rightarrow \sum a_n$ diverge

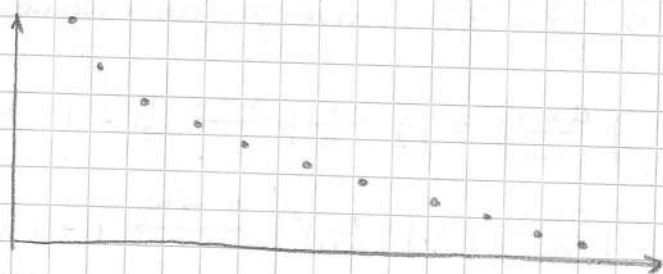
Ex:

• $\sum \frac{n}{2^n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = \frac{1}{2} < 1$
 $\Rightarrow \sum \frac{n}{2^n}$ converge.
la série est décroissante

• $\sum \frac{x^n}{n!}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow{\text{Exo}} 0 < 1$
 $\Rightarrow \sum \frac{x^n}{n!}$ converge.

• $\sum \frac{1}{n^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{2}{n} \log n} = 1$

le critère est ici inutile. (comparaison avec série géom)



Analyse I:1.4 Critères de Leibniz et de Dirichlet:Théorème: critère de Leibniz

Soit $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle, décroissante

tg $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Alors $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ converge.

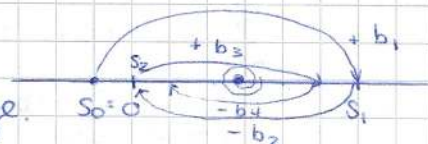
Preuve: $S_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} b_k$ $S_0 = 0$

Dessin:

On a $S_0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \dots \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1$

$\Rightarrow (S_{2n})$ est croissante et bornée

$\Rightarrow (S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge et (S_{2n+1}) converge.



Pour montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe, il faut montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}$

mais $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n+1} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}$ $\square$

Ex: $b_n = \frac{1}{n}$ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ converge (vers $\log 2$)

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ converge (vers $\frac{\pi}{4}$)

Remarque: calcul de Leibniz

$$\int_0^t (1 + x + x^2 + \dots) dx = \int_0^t \frac{1}{1-x} dx = -\log(1-t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\log(1-t) \quad \text{et si on pose } t = -1$$

$$\text{ou a: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots = -\log 2$$

$$\int_0^t (1 - x^2 + x^4 - \dots) dx = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots = \arctan(t) \quad \text{si on pose } t=1$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Projet: justifier cela})$$

Théorème: Critère de Dirichlet

Soit $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle, décroissante tg $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Soient $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$ tg la suite $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée, où

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k. \quad \text{Alors } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ converge}$$

Remarque: si $a_n = (-1)^{n-1}$ alors Dirichlet $\leadsto$ Leibniz

Preuve: Idée: somme partielle $S_0 = 0$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n \underbrace{a_k}_{(S_k - S_{k-1})} b_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})$$

On prend $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k (b_k - b_{k+1})$ car S_n est bornée et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

On sait que S_n est bornée $\exists C$ tq $|S_n| \leq C$

et donc $|S_k (b_k - b_{k+1})| \leq C (b_k - b_{k+1})$

Il suffit de montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1}$ converge

$$\sum_{k=1}^n b_k - b_{k+1} = b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \dots + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k - b_{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_1 - b_{n+1} = b_1 \text{ et donc } \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n+1} = b_1 \text{ converge} \quad \blacksquare$$

Ex:

• Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tq $|\alpha| = 1$ et $\alpha \neq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} \quad a_n = \alpha^n \text{ et } b_n = \frac{1}{n} \quad b_n \text{ décroissante et } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \alpha^k = \alpha \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

$$|S_n| = |\alpha| \frac{|1 - \alpha^n|}{|1 - \alpha|} = \frac{|1 - \alpha^n|}{|1 - \alpha|} \leq \frac{|1| + |1 - \alpha^n|}{|1 - \alpha|} = \frac{2}{|1 - \alpha|} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow (S_n) \text{ est bornée.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} \text{ converge.}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n} = \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} \text{ converge.}$$

1.5 Convergence absolue et non-absolue:

Rappel: On dit que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge

Théorème A: Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument
si $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est une bijection alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Théorème B: Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge non-absolument et
que $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $\forall s \in \mathbb{R} \exists \sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une
bijection tq $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$. Aussi, $\exists \sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ bijection
tq $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ diverge.

Ex: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$

$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$	$+\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \dots$	$= \log 2 + \frac{1}{2} \log 2 = \frac{3}{2} \log 2$
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$	$+\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$	$= \log 2$
$+\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$	$+\frac{1}{6} - \frac{1}{8}$	$= \frac{1}{2} \log 2$

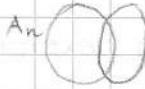
Preuve A: hypothèse: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

Important: Posons $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $S'_n = \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$

Il faut montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n$, c-à-d $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S'_n| = 0$

Calculons $S_n - S'_n$. $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ $B_n = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$

$S_n = \sum_{k \in A_n} a_k$, $S'_n = \sum_{k \in B_n} a_k$



Donc $S_n - S'_n = \sum_{k \in A_n} a_k - \sum_{k \in B_n} a_k = \sum_{k \in A_n \setminus B_n} a_k - \sum_{k \in B_n \setminus A_n} a_k$

on a donc $|S_n - S'_n| = \left| \sum_{k \in A_n \setminus B_n} a_k - \sum_{k \in B_n \setminus A_n} a_k \right| \leq \sum_{k \in A_n \Delta B_n} |a_k|$

$(A_n \Delta B_n = A_n \setminus B_n \cup B_n \setminus A_n)$

On veut montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in A_n \Delta B_n} |a_k| = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = 0$, parce que $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right) = 0$

$= 0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$

Si $N \in \mathbb{N}$ est donné, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a $\{1, \dots, N\} \subset A_n \cap B_n$ et donc $A_n \Delta B_n \subset \{N+1, \dots, \infty\}$ et donc $\sum_{k \in A_n \Delta B_n} |a_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \rightarrow 0$
et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in A_n \Delta B_n} |a_k| = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S'_n| = 0$

Preuve B: Indication

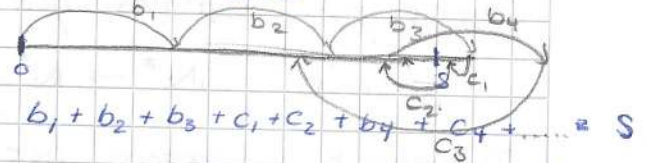
hypothèse: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge; $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ ($a_n \in \mathbb{R}$)

Soient b_n : les a_k tq $a_k \geq 0$ c_n : les a_k tq $a_k < 0$

Nous savons que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$

et que $\sum b_n = \infty$ et $\sum c_n = -\infty$

On utilise $b_1, b_2, b_3, \dots$ jusqu'à $s_n \geq s$



1.6 Produits de séries et d'exponentielles complexes:

Nous savons déjà que $\forall x \in \mathbb{C}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge

Thm: $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sin x \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \cos x$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \cos x + i \sin x$$

Rappel: Taylor Lagrange:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} x^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t_n \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_n} \quad \text{si } t_n \in [0,1]$$

Preuve: $f(x) = \exp(x)$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{t_n x} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a $|R_n| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{\lim n \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (\text{idée: Exprimer Taylor + } R_n \rightarrow 0)$$

$\sin x, \cos x$ en exercice.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} &= 1 + ix + -\frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots \\ &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

Déf: Pour $x \in \mathbb{C}$, on pose $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x \quad (\text{si } x \in \mathbb{R})$$

On va montrer que $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y) \quad \forall x, y \in \mathbb{C}$

Déf. Supposons que X est un ensemble dénombrable (biject. avec $\mathbb{N}$) $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow X$

Si $a_x \in \mathbb{C} \quad \forall x \in X$ alors on pose :

$$\sum_{x \in X} a_x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

Observation: si $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ converge absolument, alors $\sum_{x \in X} a_x$ ne dépend pas de $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow X$

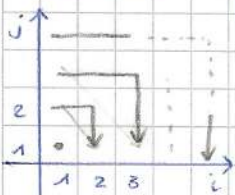
Théorème: multiplication de série

Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ et $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ convergent absolument, alors

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i \cdot b_j \text{ converge absolument et } \sum_{i,j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i \cdot b_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j$$

Preuve: un ordre de sommation :

(bijection $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)



Pour montrer que $\sum_{i,j} a_i b_j$ converge absolument, c-à-d

que $\sum_{i,j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} |a_i b_j| < \infty$ pour $l \in \mathbb{N}$, la l^{e} -ième somme

partielle de $\sum_{i,j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} |a_i b_j|$ est $\sum_{1 \leq i,j \leq l} |a_i b_j| = \sum_{i=1}^l |a_i| \cdot \sum_{j=1}^l |b_j|$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty$$

$\Rightarrow \sum_{i,j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i \cdot b_j$ converge absolument.

La l^{e} -ième somme partielle $S_{l,2}$ de $\sum_{i,j} a_i \cdot b_j$ est $(\sum_{i=1}^l a_i) \cdot (\sum_{j=1}^l b_j)$

$$\text{On a donc } \lim_{l \rightarrow \infty} S_{l,2} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

Nous savons que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe, parce que la série $\sum_{i,j} a_i \cdot b_j$

converge absolument, et donc elle converge

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

Cor. Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ et $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ convergent absolument et si

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \text{ alors } (\sum a_i) \cdot (\sum b_j) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n$$

Preuve: nous savons que $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i) (\sum_{j=1}^{\infty} b_j) = \sum_{i,j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_i b_j$

Choix d'un ordre de sommation : (passer par les diagonales)

$$\text{On a donc } \sum_{i,j} a_i b_j = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

Analyse I:

le 28.02.18

Ex: Soient $x, y \in \mathbb{C}$ $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$

$$a) \quad d_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

On a donc $\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \exp(x+y)$

Théorème: $\forall x, y \in \mathbb{C}$ on a $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$

Ex: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (si $|x| < 1$)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \quad a_n = x^n = b_n$$

$$d_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^n x^n = (n+1)x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Resumé ch 1:

Savoir faire: déterminer si une série converge (Méthodes: comparaison avec $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$; Leibniz et Dirichlet)

théorie: $\sum a_n = \sum b_n$ si $\sum a_n$ converge absolument

- le produit de 2 séries
- $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$.

Théorème de Euler:

$$\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = \infty$$

Preuve: version un peu naïve: $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots)(1 + \frac{1}{3} + \dots)(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots)(1 + \frac{1}{7} + \dots) \dots$

$$\rightarrow = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{On a donc } \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1-1/p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

théorème fond. arithmétique

$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \dots$
($a, b, c \dots \in \mathbb{N}$)
 $n = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$$\sum_p -\log(1-1/p) = \infty$$

$$\text{Car la } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\log(1-x)}{x} = 1$$

$$\text{On a } \sum_p \frac{1}{p} = \infty$$

version rigoureuse: si $N \in \mathbb{N}$ est donné et si $k \in \mathbb{N}$ est assez grand alors $\prod_{p \leq k} (1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^k}) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$

On a $1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^k} \leq \frac{1}{1-1/p}$ et donc $\prod_{p \leq k} \frac{1}{1-1/p} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$

et donc $\sum_{p \leq k} -\log(1-1/p) \geq \log \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ quand $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{p \text{ premier}} -\log(1-1/p) = \infty$$

Cor: de $\sum 1/p = \infty$

- # des premiers est infini (∞)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow$ les premiers sont + denses dans $\mathbb{N}$ que les carrés
- même $\forall \varepsilon > 0 \quad \sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$

Beaucoup de travail:

$$\#\{p \text{ premiers}; p \leq N\} \approx \frac{N}{\log N}$$

2. Suites et séries de fonctions:

Motivation: justifier des calculs de cette forme

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \xrightarrow{\quad} \quad -\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

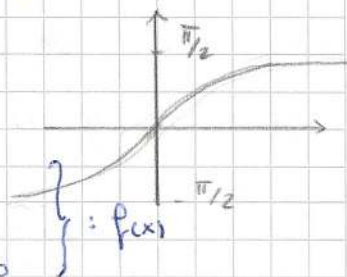
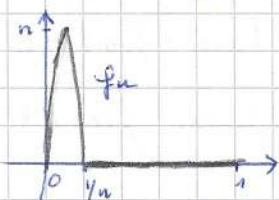
$$\quad \quad \quad \xrightarrow{\quad} \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

2.1 Convergence uniforme:

Déf: Soit A un ensemble et $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions. On dit que la suite f_n converge vers $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ponctuellement si $\forall x \in A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (\text{on écrit } f_n \rightarrow f \text{ point})$$
Ex: 1) $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = \arctan(nx)$

pour $x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases} = f(x)$

 $f_n \rightarrow f$ ponctuellementLes f_n sont continues, mais f n'est pas continue2) $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ si $x > 0 \Rightarrow f_n(x) = 0$
si $n > 1/x$

pour $x \in [0; 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

 $f_n \rightarrow f$ point où $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0; 1]$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$$

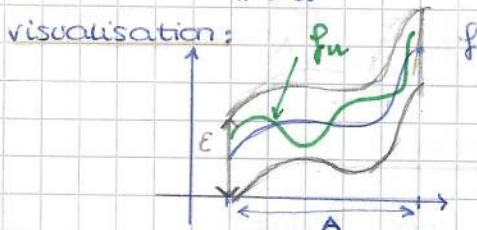
mais $\int_0^1 f(x) dx = 0$ et donc

$$\text{la } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1/2 \neq \int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx = 0$$

Notation: pour $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, on pose $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$
 $\uparrow$
la norme

Intuition: si $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$, alors $\|f - g\|$ est la "distance" entre f et g .

Déf: Soit A un ensemble, $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonction.
On dit la suite converge uniformément vers $f: A \rightarrow \mathbb{C}$
si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$, c-à-d ($\forall \epsilon > 0$) ($\exists n_0$) ($\forall n \geq n_0$) $\|f_n - f\| < \epsilon$



Prop: Soit $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ unif, alors $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ point.

Dém: Soit $x \in A$. On a $0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in A} |f_n(y) - f(y)| = \|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ $\square$

Ex: $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$, donc $f_n \rightarrow 0$ point
est-ce que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ uniformément?

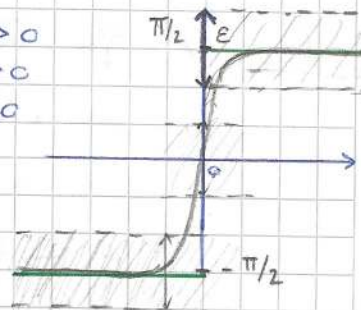
$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin nx}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et donc $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ uniformément.

Ex: $f_n(x) = \arctan nx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$

$$\|f_n - f\| = ? \quad (Exo)$$

$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniform.



Remarque: pourquoi uniforme?

$f_n \rightarrow f$ point: $\forall x, \forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

$f_n \rightarrow f$ uniformément: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \|f_n - f\| < \epsilon$
 $(\|f_n - f\| \rightarrow 0)$

$\uparrow$
 $\forall \epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall x, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Analyse I:

Rappel:

convergence uniforme

si $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ est une suite de fonctions on dit
 $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ unif si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$
 où $\|g\| = \sup_{x \in A} |g(x)|$

Correction: Remarque précédente: $f_n \rightarrow f$ ponct. n_0 dépend de x $f_n \rightarrow f$ unif. n_0 ne dépend pas de x .

Théorème: Soient $A \subset \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions continues.
 Si $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformément, alors $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ est continue.

Preuve: Il faut montrer $\forall x_0 \in A$ que f est continue en a , c-à-d

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \text{ tq } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Car $\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors si n est suffisamment grand, alors

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3}. f_n \text{ est continue, donc } \exists \delta > 0 \text{ tq } |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall x \in A \text{ tq } |x - x_0| < \delta$$

$$\text{Nous avons } |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$

$$= 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

2.2 Critères de convergence uniformeThéorème: Critère de Cauchy.Soit $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions.

Si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0$ si $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ alors la suite
 $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément.

Preuve:

$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge ponctuellement c-à-d ($\forall x \in A$) la suite $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge.

Il suffit de montrer que la suite $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy, mais $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\| < \varepsilon$ et donc $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy.

Preuve (suite): On pose $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Il faut montrer que $f_n \rightarrow f$ uniformément.

• Convergence uniforme :

Si $n, n' \geq n_0$, alors $|f_n - f_{n'}| \leq \varepsilon$ et donc $\forall x \in A$
 $|f_n(x) - f_{n'}(x)| \leq \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$$
$$\Rightarrow \sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \|f - f_n\| \leq \varepsilon$$

On a donc montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \geq n_0, \|f - f_n\| \leq \varepsilon$

c-à-d $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$ c-à-d $f_n \rightarrow f$ unif. $\blacksquare$

Déf. Si $g_n: A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ est une suite de fonctions.

On dit que $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge unif si la suite des fonctions
 $S_n = \sum_{k=1}^n g_k$ converge unif.

Prop. Si $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$, alors $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
inég. des Δ pour la norme.

Preuve. si $x \in A$ alors $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$
On applique $\sup_{x \in A}$ et on obtient $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Théorème: Critère de Weierstrass

Si $g_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ est une suite de fonctions tq $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\| < \infty$
alors $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge uniformément

Preuve: (on va utiliser le critère de Cauchy)

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n g_k$ et $t_n = \sum_{k=1}^n \|g_k\|$ ($S_n: A \rightarrow \mathbb{C}$, $t_n \in \mathbb{R}_+$)

Si $m \geq n \in \mathbb{N}$, alors $\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m g_k \right\| \stackrel{(\Delta)}{\leq} \sum_{k=n+1}^m \|g_k\| = t_m - t_n$
 $= |t_m - t_n|$ On a trouvé que $\|S_m - S_n\| \leq |t_m - t_n|$

la suite $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy, donc par le critère de Cauchy
la suite $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge unif $\blacksquare$

Analyse I:

le 06.03.18

Ex: • $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

$$\begin{aligned}\|g_n\| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| = \frac{1}{n^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin(nx)| \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot 1 = \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge on peut dire $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\| < \infty$

et la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniformément
et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ est une fonction continue.

Cor: du critère de Weierstrass

Si $g_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ est une suite de fonctions et si $b_n \in \mathbb{R}_+$ sont tq $\forall x \in A$ $|g_n(x)| \leq b_n$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ converge uniformément.

Preuve: On a $\|g_n\| \leq b_n$ et donc $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ■

2.3 Intégration et Différentiation.

Théorème: Soient $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ des fonctions continues.

Si $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ unif, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Preuve: $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ unif $\Rightarrow f$ est continue et donc $\int_a^b f(x) dx$ existe.

Il faut mg $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx = 0$

On a les inégalités:

$$\begin{aligned}0 \leq \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \\ &= (b-a) \|f_n - f\|\end{aligned}$$

Car $\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| = 0$ ■

Ex: • si $|x| < 1$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge vers $\frac{1}{1-x}$

si $t \in (-1, 1)$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformément sur $[0, t]$

(ou si $t < 0$ $[t, 0]$), par le critère de Weierstrass:

$$\begin{aligned}g_n(x) &= x^n \quad \|g_n\| = \sup_{\substack{x \in [0, t] \\ \text{ou } [t, 0]}} |x^n| = |t|^n \text{ car } |t| < 1 \text{ on a } \sum_{n=1}^{\infty} |t|^n < \infty \\ &\Rightarrow \sum \|g_n\| < \infty\end{aligned}$$

Ex (suite): On a donc $\int_0^t \frac{dx}{1-x} = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx \stackrel{\text{thm précédent}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^n dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\log(1-t) \quad \Delta |t| < 1$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

Δ pour $t = -1$ cela ne marche pas

• si $|x| < 1$, on a ($q = -x^2$) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$
 si $t \in (-1; 1)$ alors $\rightarrow$ converge uniformément sur $[0; t]$

$$\text{et donc } \arctan(t) = \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{sur } t \in (-1; 1)$$

Thm: Soit $f_n: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, une suite de fonction dérivables, telles que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge (ponctuellement) et $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformément. Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'$$

Preuve: On pose $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$

le 07.03.18

On veut montrer que $f' = g$. Soient $\alpha, \beta \in [a; b]$, $\alpha < \beta$

Car $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ uniformément, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f'_n(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(\beta) - f_n(\alpha)) = f(\beta) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \rightarrow f$ est une primitive de g .
 et donc $f' = g$.

Thm: pour les séries

Si $\sum g_n$ conv. pont. et $\sum g'_n$ converge unif. alors $(\sum g_n)' = \sum g'_n$

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$

Soit $0 < q < 1$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge sur $[-q; q]$

$$g_n' = (x^n)' = nx^{n-1}, \text{ on a donc } \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad (\forall x \in [-q; q])$$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ converge unif. sur $[-q; q]$ (pour savoir, on utilise Weierstrass)

$\|nx^{n-1}\| = \sup_{x \in [-q; q]} |nx^{n-1}| = nq^{n-1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} < \infty$ par le critère du quotient.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = q \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = q < 1$$

* On a donc $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad \forall x \in [-q; q]$

Comme c'est vrai $\forall 0 < q < 1$ c'est aussi vrai $\forall x \in (-1; 1)$

2.4 Séries entières

Ex :

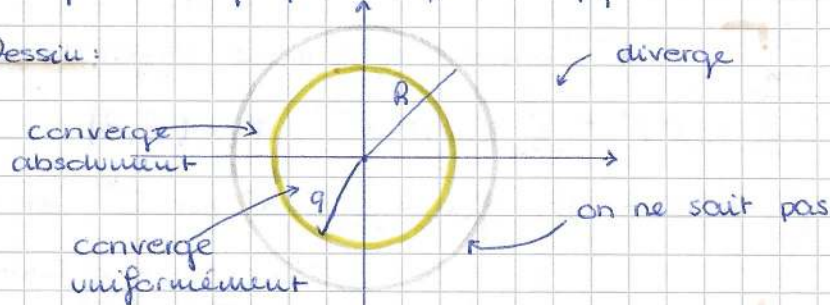
- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$
- $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad x \in (-1, 1)$

Séries entières : C'est une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$, à $C_n \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$

Thm : Soient $C_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe $R \in [0, \infty]$ appelé le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$, tq : $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ converge si $|x| < R$ (absolu) et diverge si $|x| > R$

Si $0 \leq q < R$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ converge uniformément sur le disque $D_q = \{x \in \mathbb{C}, |x| \leq q\}$

Dessin :



△ On peut calculer

$$R : R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} \right)^{-1}$$

Preuve : On utilise le critère de la racine pour $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|C_n|} = \frac{|x|}{R} \quad \text{pour } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|C_n|}}$$

donc : $|x| < R \quad \frac{|x|}{R} < 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ converge absolument.

$|x| > R \quad \frac{|x|}{R} > 1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ diverge

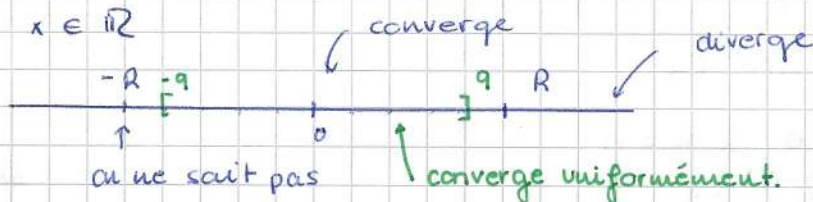
Par mq $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ conv. unif. sur D_q ($q < R$) on utilise Weierstrass

$\sup_{x \in D_q} |C_n x^n| = |C_n| q^n$ comme $q < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} C_n q^n$ conv. absol.

c-à-d $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n| q^n$ converge

Weierstrass $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ converge uniformément sur D_q

Dessin : $x \in \mathbb{R}$



Prop: le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ est $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right| \in [0; \infty]$ si cette limite existe.

Preuve: Critère du quotient pour $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \frac{|x|}{R}, \text{ donc}$$

si $\frac{|x|}{R} < 1$ $\sum C_n x^n$ converge et si $\frac{|x|}{R} > 1$ $\sum C_n x^n$ diverge.

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ - trouver R

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| = 1 \quad \text{aussi} \quad R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2}} = 1 \quad \uparrow \Delta \text{ calcul à vérifier.}$$

à partir d'ici, on aura $x \in \mathbb{R}$

Thm: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ une série entière avec le rayon de convergence $R > 0$

Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot n \cdot x^{n-1}$ entière a le même rayon de convergence

$$\text{et on a } \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot n \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in (-R; R)$$

La fonction $f: (-R; R) \rightarrow \mathbb{C}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ est C^∞ , et $C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Preuve: Si R' est le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1}$, alors

$$R' = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)C_{n+1}}} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_{n+1}}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_{n+1}}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n}} = R$$

$(*)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe, alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

pourquoi?
(à trouver)

Choisissons $q \neq 0$: $0 < q < R$. Alors les séries $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} C_n n \cdot x^{n-1}$ convergent uniformément sur $[-q; q]$, et donc

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n n \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in [-q; q] \quad \text{car c'est vrai } \forall q < R$$

L'égalité est vraie $\forall x \in (-R; R)$

f' existe, f'' existe, $\Rightarrow f \in C^\infty((-R; R); \mathbb{R})$

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot C_n$$

$$(x^k)^{(n)} = 0 \quad \text{si } k < n$$

$$(x^n)^{(n)} = n!$$

$$(x^k)^{(n)} = N \cdot x^{k-n} \quad k > n = 0 \quad \text{si } x = 0$$

$$\text{où } N = k(k-1) \cdots (k-n+1)$$

Analyse I:

1e 07.03.18

Ex: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \lambda^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \quad (R = \infty)$

c-a-d $(\exp x)' = \exp(x)$

• si $\lambda \in \mathbb{C}$ $\exp(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{n!} \quad (R = \infty)$
 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \lambda^n x^{n-1}}{n!} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{n!}$
 donc $(\exp(\lambda x))' = \lambda \exp(\lambda x)$

• Rappel: si $a \in \mathbb{N}$, on a $(1+x)^a = \sum_{n=0}^a \binom{a}{n} x^n$
 où $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} = (*)$

si $a \in \mathbb{C}$ on définit $\binom{a}{n}$ par (*)

formule du binôme: si $x \in (-1,1)$ et si $a \in \mathbb{R}$ alors $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$

Preuve: R pour $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{n+1}{|a-n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow$ la série converge sur $(-1,1)$

On pose $f(x) = \sum \binom{a}{n} x^n$ $(1+x)f'(x) = af(x)$
 on a aussi $g(x) = (1+x)^a$ $(1+x)g'(x) = ag(x)$

$\Rightarrow \left(\frac{f}{g} \right)' = 0$ sur $c \cdot g(x)$ $c = \text{const}$ $f(0) = 1 = g(0)$

Analyse I:

1e 13.03.18

Parquoi: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \neq \sup$

car $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} =$ rayon de la convergence

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + x \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} x^n$

1 converge $\Leftrightarrow x$ converge $\Rightarrow$ les rayons sont égaux

Rappel: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Prop: Si $t \in (-R; R)$, où R est le rayon de convergence de $\sum c_n x^n$
 alors $\int_0^t \left(\sum c_n x^n \right) dx = \sum c_n \int_0^t x^n dx = \sum c_n \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} \right)$

Preuve: converge uniformément

Ex: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ on obtient $-\log(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$

$\forall t \in (-1,1) \quad R=1$

parquoi $\neq$ est vrai pour $t = -1$?

Thm: Abel

Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x_0^n$ converge pour un $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, x_0]$ si $x_0 > 0$ ou sur $[x_0, 0]$ si $x_0 < 0$.

En particulier, la fonction $f: [0, x_0] \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ est continue et donc $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Ex: • $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n =$ elle converge pour $x = -1 (= x_0)$ ($R=1$)

Où a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad \forall x \in (-1, 1)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (Leibniz) et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x \rightarrow -1} -\log(1-x) = -\log 2$

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} (-1)^n = \arctan(x) \quad \forall x \in (-1, 1)$

la série converge pour $x=1$. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} (-1)^n = \lim_{x \rightarrow 1} \arctan x = \pi/4$

Preuve: Simplifications:

• On peut supposer que $x_0 = 1$, parce que

$$\sum C_n x^n = \sum \underbrace{C_n x_0^n}_{C_n} \underbrace{(x/x_0)^n}_x$$

• On peut supposer $\sum C_n x_0^n = \sum C_n = 0$, sinon on pose /

remplace $C_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n$.

le problème est de démontrer si $\sum C_n = 0$ alors $\sum C_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1]$

On utilise la sommation par parties:

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n C_k$, ($S_{-1} = 0$)

$$\sum_{k=0}^n C_k x^k = \sum_{k=0}^n (S_k - S_{k-1}) x^k = \sum_{k=0}^{n-1} S_k (x^k - x^{k+1}) + S_n x^n$$

nous savons que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ ($= \sum C_k$) et donc $S_n x^n \rightarrow 0$ unif. sur $[0, 1]$ (par $\|S_n x^n\| = |S_n| \rightarrow 0$)

$$\text{On a donc } \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x) \cdot S_k \cdot x^k = (*)$$

Il faut mq (*) converge unif. sur $[0, 1]$

$$\text{Posons: } f_n(x) = \sum_{k=0}^n (1-x) S_k x^k \quad \text{et } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-x) S_k x^k$$

$$\text{Calculons: } \|f - f_n\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_n(x)| \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-x) S_k x^k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-x) x^k |S_k| \leq \sup_{L \geq n+1} |S_L| \sum_{k=L}^{\infty} (1-x) x^k = \sup_{L \geq n+1} |S_L| \cdot (1-x) (x^{L+1}) \cdot \frac{1}{1-x} \quad p. 22$$

Preuve: (suite)

$$= \sup_{L \geq n+1} |S_L| (1-x) \frac{1}{1-x} \cdot x^{n+1} \leq \sup_{L \geq n+1} |S_L| \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\text{si } x=1 : f(x) = f_n(x) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{L \geq n+1} |S_L| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |S_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = 0 \quad \square$$

2.5 Séries de Taylor:

On a vu si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, alors $f \in C^{\infty}((-R, R))$ et $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Déf. si $f \in C^{\infty}((-a, a))$ alors la série de Taylor de f est $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Est-ce que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)$?

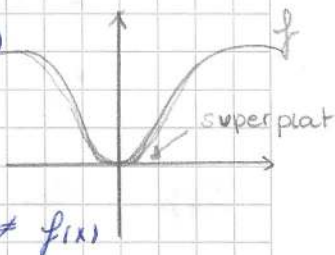
Ex: • $\exists f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ tq sa série de Taylor diverge $\forall x \neq 0$

• on pose $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \exp(-1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

en fait $f^{(n)}(x) = p(\frac{1}{x}) \cdot f(x)$ où p est un polynôme

et $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. la série de Taylor est 0. $\neq f(x)$

Résumé de la partie 2:

à savoir: • déterminer si une suite/série de fonctions converge uniformément.

Méthode: 1: Utiliser la définition $\|f_n - f\|$
2: Critère de Weierstrass.

à quoi ça sert: 1. Mq $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ est une fonction continue

$$2. \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx$$

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n)'$$

cas particulier: séries entières

• rayon de convergence

• on peut intégrer et différencier terme par terme

3. Espaces métriques

- Motivations:
- préparation pour fonctions à plusieurs variables
 - mieux comprendre la conv. uniforme.
 - "grande unification"

3.1 Métriques et normes

Déf. Si X est un ensemble, alors une métrique sur X est une fonction $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ tel que $\forall x, y, z \in X$

- 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

- Ex:
- $X = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$
 - $X = \mathbb{C}$ et $d(x, y) = |x - y|$
 - $X = \mathbb{R}^n$ et $d(x, y) = \sqrt{(x - y)_1^2 + \dots + (x - y)_n^2}$ (prod. scalaire)

Déf. Soit V un espace vectoriel réel (ou complexe). Une norme sur V est une fonction $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty)$ tq $\forall v, w \in V$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

- 1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- 2) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
- 3) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

Prop: Si $\|\cdot\|$ est une norme sur V , alors $d(v, v') = \|v - v'\|$ est une métrique sur V .

Preuve:

- 1) $d(v, v) = \|v - v\| = 0 \Leftrightarrow v = v$ ✓
- 2) $d(v, v') = \|v - v'\| = \|v - v'\| \cdot |(-1)| = \|v - v'\| = d(v, v')$ ✓
- 3) Inégalité Δ déjà écrite:
 $d(v, w) = \|v - w\| = \|v - v + v - w\| \leq \|v - v\| + \|v - w\| = d(v, v) + d(v, w)$ ✓

Terminologie: espace métrique = ensemble avec une métrique
 espace normé = espace vectoriel avec une norme.

- Ex:
- $V = \mathbb{R}^n$, $\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ la norme euclidienne
 - $V = \mathbb{R}^n$, $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$
 - $V = \mathbb{R}^n$, $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$
 - $V = C([a, b])$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$
 $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$
 - A un ensemble, $V = B(A) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C}) \mid f \text{ bornée}\}$
 $\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} |f(x)|$ la norme dans la conv. uniforme

Rappel: Espace métrique $(X; d)$ Espace normé $(V; \|\cdot\|)$

Remarque: Si $(X; d)$ est un espace métrique et si $Y \subset X$, alors $(Y; d_Y)$ est un espace métrique

3.2 Fonctions continues

Déf: Soient $(X; d_X)$ et $(Y; d_Y)$ deux espaces métriques et soit $f: X \rightarrow Y$ une application. Alors f est continue en $x_0 \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$
 $\forall x \in X, d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Déf/Notation: Si $(X; d)$ est un espace métrique, $x_0 \in X$, $R \in (0; \infty)$

alors la boule ouverte de rayon R centrée en x_0 est

$$B_X(x_0; R) = \{x \in X; d(x, x_0) < R\}$$

Alors f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B_X(x_0; \delta)) \subset B_Y(f(x_0); \varepsilon)$

Thm: Si $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont continues, alors $g \circ f: X \rightarrow Z$ est continue.

Preuve: Soit $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$, $z_0 = g(y_0) \in Z$

g est continue: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, g(B_Y(y_0; \delta)) \subset B_Z(g(y_0); \varepsilon) = B_Z(z_0; \varepsilon)$

f est continue: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B_X(x_0; \delta)) \subset B_Y(y_0; \delta)$

et donc $g \circ f(B_X(x_0; \delta)) \subset B_Z(z_0; \varepsilon)$. ▀

Prop: Si X est un espace métrique $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, alors $f+g, f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues

Preuve: Voir semestre 1, Analyse I ▀

Prop: Si $f: X \rightarrow Y$ est une application Lipschitzienne

$(\exists C > 0, \forall x, x' \in X, d(f(x), f(x')) \leq C \cdot d(x, x'))$ Alors f est continue

Preuve: On prend $\delta = \varepsilon/c$

Ex: • $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \quad i \in [1, n]$ c'est une application Lipschitzienne.
(avec $C=1$) Donc, c'est continu.

• (utilisons $f+g, fg$ sont continues)

On a donc que tout polynôme $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continu (par ex)

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2 + \frac{x_1 x_3}{3}$$

• On peut composer avec des fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (par ex)

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2, x_3) = \exp(x_1 x_2 + \sin(x_3^3 + x_1))$$

• $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{x_1 - x_2} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{diagonale} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}\} \rightarrow \mathbb{R}$
est une fonction continue.

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2 \mapsto \frac{1}{x_1 - x_2}$$
$$\in \mathbb{R}^2 \setminus \text{diag} \rightarrow \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \in \mathbb{R}^*$$

• $V = C([a, b])$, avec la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$

$I: V \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ est lipschitzienne.

$$|I(f)| = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \|f\|_\infty (b-a)$$

$$C = (b-a) \Rightarrow I \text{ est continue.}$$

I lipschitzienne: $\forall f_1, f_2 \in V \quad |I(f_1) - I(f_2)| \leq C \|f_1 - f_2\|_\infty$

I linéaire $\Rightarrow |I(f_1 - f_2)| \leq C \|f_1 - f_2\|_\infty$ et donc

$$|I(f)| \leq C \|f\|_\infty \quad \forall f \in V \quad (\text{tg } f = f_1 - f_2)$$

3.3 Limites de suites.

Déf: Soit (X, d) un esp. métrique, $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ une suite dans X
et $x \in X$. Alors la suite x_n converge vers x , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

Ex: • $X = \mathbb{R}$ convergence habituelle

• si A est un ensemble $B(A) =$ l'espace des fonctions bornées

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } \|f\|_\infty = \sup |f|$$

Analyse I:

le 14.03.18

Thm: Soient X et Y des espaces métriques, une application $f: X \rightarrow Y$ et $a \in X$. Alors f est continue en a ssi pour toute suite $x_n \in X$ tq $\lim x_n = a$, on a $\lim f(x_n) = f(a)$

Preuve: 1^{er} semestre $\square$

Ex: $I: C([a; b]) \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $\|\cdot\|_\infty$) est continue et donc si $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans $C([a; b])$. c.à.d si $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformément alors $\lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) = I(f)$ parce que $\int_a^b (\lim f_n) dx = \lim \int_a^b f_n dx$ (I est la fonction qui associe l'intégrale)

Déf: On dit que 2 normes, $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur V sont équivalentes si $\exists c_1, c_2 > 0$ tq $\forall v \in V$, $\|v\|' \leq c_1 \|v\|$ et $\|v\| \leq c_2 \|v\|'$

Prop: Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ 2 normes équivalentes sur V . Si $x_n \in V$ est une suite et $a \in V$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\|' = 0$

Preuve: On a $0 \leq \|x_n - a\|' \leq c_1 \|x_n - a\|$ et donc si $\|x_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ alors aussi $\|x_n - a\|' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ $\square$ (même chose dans l'autre sens)

Cor: si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont 2 normes équivalentes sur V et $f: X \rightarrow V$ et $g: V \rightarrow Y$, des applications, alors f est continue par rapport à $\|\cdot\| \Leftrightarrow f$ est continue p.r.à $\|\cdot\|'$, et de même pour g .

Preuve: f continue ssi $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ $\square$

Thm: si V est un esp. vectoriel (réel ou complexe) tq $\dim V < \infty$ alors toutes les normes sur V sont équivalentes

Preuve: plus tard $\square$

Cas particulier:

Prop: Sur $\mathbb{R}^n$, les normes $(v = (v_1, \dots, v_n))$ $v_i \in \mathbb{R}$ $\|v\| = \sqrt{\sum v_i^2}$,
 $\|v\|_1 = \sum |v_i|$ et $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ sont équivalentes.

Preuve: $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq n \cdot \|v\|_\infty$$

$\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|$:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\| \leq \sqrt{n} \|v\|_\infty$$

cela implique $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalent. ■

Prop: Soit $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k}) \in \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$ une suite dans $\mathbb{R}^k$.

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = (a_1, \dots, a_k) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,i} = a_i \quad \forall i \in [1, k]$

Preuve: On utilise $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^k$ $\|x_n - a\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_{n,i} - a_i|$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\|_1 = \sum_{i=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n,i} - a_i|$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\|_1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n,i} - a_i| = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Prop: Soient X , un espace métrique et $f: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application.

On a $f = (f_1, f_2, \dots)$, $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ c-à-d $\forall x \in X$ $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$

Alors f est continue ssi les f_i sont continues.

Preuve: On utilise la proposition précédente (pour la convergence dans $\mathbb{R}^k$)
et la caractérisation des applications continues par les limites
de suite (détails = exo) ■

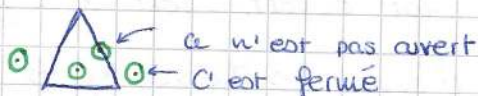
3.4 Sous-ensembles ouverts et fermés.

Rappel: la Boule ouverte: $B_X(x; R) = \{x' \in X \mid d(x, x') < R\}$
 $x \in X$ esp métrique $R > 0$.

Déf: Soit X , un espace métrique, si $U \subset X$ est un sous-ensemble, on dit qu'il est ouvert si $\forall x \in U (\exists \varepsilon > 0) B_X(x; \varepsilon) \subset U$.

On dit que U est fermé si $X \setminus U$ est ouvert.

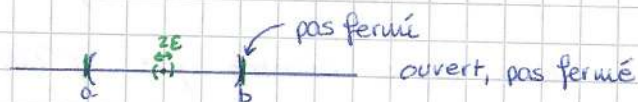
Ex: • Triangle $\subset \mathbb{R}^2$



• Intervalle $\subset \mathbb{R}$

• $(a, b) \subset \mathbb{R}$

$(a, b) \in \mathbb{R}$



• $[a, b] \subset \mathbb{R}$

Fermé pas ouvert.

• $[a, b) \subset \mathbb{R}$

ni ouvert, ni fermé

• $(-\infty, a) \subset \mathbb{R}$

ouvert, pas fermé

• $(-\infty, a] \subset \mathbb{R}$

pas ouvert, fermé

• $(-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}$ ouvert et fermé
 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ ouvert et fermé

• Si K un esp. métrique $\emptyset \subset X$, $X \subset X$ sont ouverts et fermés.

Prop Si X est un espace métrique, $x \in X$, $R > 0$, alors $B_X(x; R) \subset X$ est un sous-ensemble ouvert.

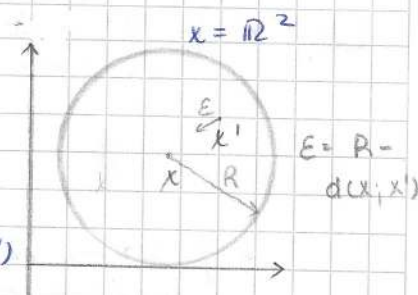
Preuve: si $x' \in B(x; R)$, on pose $\varepsilon = R - d(x; x') > 0$

Hq $B(x'; \varepsilon) \subset B(x; R)$

si $x'' \in B(x'; \varepsilon)$, c-à-d $d(x'; x'') < \varepsilon$,

On a $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'') = R - \varepsilon + d(x', x'')$
 $< R - \varepsilon + \varepsilon = R$

donc $x'' \in B(x; R)$



Thm: Soit X, Y des espaces métriques et $f: X \rightarrow Y$ une application.

Alors f est continue ssi $\forall U \subset Y$ ouvert la préimage de U , $f^{-1}(U) \subset X$ est un sous-ensemble ouvert.

Notation: la préimage de U : $f^{-1}(U) = \{x \in X; f(x) \in U\} \subset X$.

Rappel: f est continue en $x \in X$ si ($y = f(x)$) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tq } f(B_X(x; \delta)) \subset B_Y(y; \varepsilon)$
c-à-d que $B_X(x; \delta) \subset f^{-1}(B_Y(y; \varepsilon))$.

Preuve:

$\Rightarrow$: Supposons que f est continue et que $U \subset Y$ est ouvert et
mq $f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert. Soit $x \in f^{-1}(U)$, c-à-d $x \in X$ tq
 $y = f(x) \in U$. U ouvert $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \text{ tq } B_Y(y; \varepsilon) \subset U$
 f est continue $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } B_X(x; \delta) \subset f^{-1}(B_Y(y; \varepsilon)) \subset f^{-1}(U)$
ainsi on a montré que $f^{-1}(U)$ est ouvert

$\Leftarrow$: supposons que $\forall U \subset Y$ ouvert la préimage $f^{-1}(U)$ est ouverte
Mq f est continue en $x \in X$ ($y = f(x)$) Si $\varepsilon > 0$, on pose $U = B_Y(y; \varepsilon)$
Alors $f^{-1}(B_Y(y; \varepsilon))$ est ouvert, $x \in f^{-1}(B_Y(y; \varepsilon))$ et donc $\exists \delta > 0$
tq $B_X(x; \delta) \subset f^{-1}(B_Y(y; \varepsilon))$ donc f est continue ($\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$) ■

Cor: $f: X \rightarrow Y$ est continue $\Leftrightarrow \forall S \subset Y$ fermé, $f^{-1}(S) \subset X$ est fermé.

Preuve: $S \subset Y$ fermé $\Leftrightarrow Y \setminus S$ ouvert et $f^{-1}(Y \setminus S) = X \setminus f^{-1}(S)$

et donc $f^{-1}(Y \setminus S) \subset X$ est ouvert $\Leftrightarrow f^{-1}(S) \subset X$ est fermé ■

Ex: • $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x \cdot y$ $f^{-1}(\underbrace{(-\infty; 1)}_{\text{ouvert}}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy < 1\}$
 $\Rightarrow f^{-1}((-\infty; 1))$ est ouvert.

$f^{-1}(\underbrace{[1; \infty)}_{\text{fermé}}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy \geq 1\}$
 $\downarrow$
fermé.

• $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
 $(x, y, z) \mapsto \exp(x + y \sin z) + xz$

alors $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) > 3\} \subset \mathbb{R}^3$ est ouvert ($= f^{-1}((3; \infty))$)

Thm: Soit X un espace métrique

1) Si $U_\alpha \subset X$ sont ouverts, $\alpha \in A$ [A peut être infini] alors $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subset X$ est ouvert.

2) Si $U_1, \dots, U_n \subset X$ sont ouverts, alors $\bigcap_{i=1}^n U_i \subset X$ est ouvert.

$\uparrow n \neq \infty$

Ex: (contre exemple) $U_k \subset \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{N}$ $U_k = (0; 1 + 1/k)$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = (0; 1] \subset \mathbb{R}$
 $\mathbb{N}$ n'est pas ouvert.

Preuve:

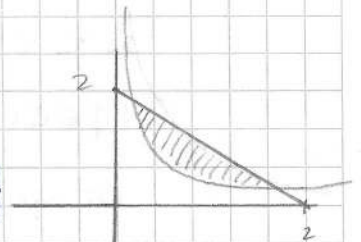
- 1) Si $U_\alpha \subset X$ sont ouverts ($\alpha \in A$) et si $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, c-à-d si $\exists \beta \in A$ tq $x \in U_\beta$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tq $B_x(x; \varepsilon) \subset U_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ et donc $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ est ouvert.
- 2) si $U_1, \dots, U_n$ sont ouverts et si $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, c-à-d si $x \in U_i \forall i=1, \dots, n$ U_i est ouvert $\Rightarrow \exists \varepsilon_i > 0$ tq $B(x; \varepsilon_i) \subset U_i$, on pose $\varepsilon = \min_{i=1, \dots, n} \varepsilon_i$ et on a $B(x; \varepsilon) \subset U_i \forall i$ et donc $B(x; \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$ et donc $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est ouvert.

- Cor: 1) Si $S_\alpha \subset X$ ($\alpha \in A$) sont fermés alors $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$ est fermé
- 2) Si $S_1, \dots, S_n$ sont fermés alors $\bigcup_{i=1}^n S_i$ est fermé.

Preuve: 1) $X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus S_\alpha)$

2) $X \setminus \bigcup_{i=1}^n S_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus S_i)$

Ex: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy \geq 1 \text{ et } x + y \leq 2 \text{ et } x \geq 0\}$



L'intersection de 3 ensembles fermés $\Rightarrow$ l'ensemble est fermé.

Thm: $S \subset X$ est fermé $\Leftrightarrow$ pour toute suite $s_1, s_2, \dots$ tq $s_n \in S \forall n$ et tq $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in X$ existe on a $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in S$

Ex: $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ n'est pas fermé $s_n = \frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin (0, 1]$

lemme: Si $x \in X$, alors $\exists$ une suite $s_n \in S$ tq $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(x; \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ (*) (SCX) top métrique

Preuve: Si (*), choisissons un point $s_n \in B(x; 1/n) \cap S$, on a $d(x, s_n) < 1/n$

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$

Si s_n existe car $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \text{ tq } d(x, s_n) < \varepsilon$
c-à-d $s_n \in B(x; \varepsilon) \subset S \Rightarrow B(x; \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$

Preuve du thm: / à montrer: $S \subset X$ est fermé ssi S contient les limites c-à-d
 (Thm: $S \subset X$ est fermé ssi $\forall$ suite $s_n \in S$ tq $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in X$ existe)
 on a $\lim s_n \in S$.

$S \subset X$ est fermé $\Leftrightarrow X \setminus S$ est ouvert, c-à-d ssi

$\forall x \in X \quad x \notin S \Rightarrow \exists \epsilon > 0 \quad B(x, \epsilon) \subset X \setminus S$ c-à-d (contraposée) ssi

$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0 \quad B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow x \in S$ propriété de $x \in X$ (*)

On a montré (Lemme) que (*) $\Leftrightarrow \exists$ suite $s_n \in S$ tq $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$ ■

fonctions bornées de $[a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

Ex: $X = B([a; b])$, avec $\|f\|_\infty = \sup |f|$

$S = C([a; b]) \subset B([a; b])$

une suite $f_n \in B([a; b])$ converge vers $f \in B([a; b])$ ssi $f_n \rightarrow f$ unif

si $f_n \in C([a; b])$ converge unif vers f , alors f est continue

($f \in C([a; b])$). Alors, on a montré que $C([a; b]) \subset B([a; b])$

est un sous-ensemble fermé.

3.5 Espaces compacts.

Rappel: • si $x_n \in \mathbb{R}$ est une suite bornée, alors $\exists$ sous-suite convergente

• si $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f atteint son max et son min sur $[a; b]$

Déf: Un espace métrique X est compact ssi pour toute suite $x_n \in X$ il existe une sous-suite convergente.

Ex: $X = [a; b]$

Thm: Si X est un espace métrique compact et si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f atteint son maximum et son minimum.

Preuve: Soit $x_n \in X$ $n \in \mathbb{N}$ une suite tq $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup_{x \in X} f(x)$

Soit y_n une sous-suite de x_n convergente. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) =$

$= \sup_{x \in X} f(x)$, et (f est continue) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(y)$ à

$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ donc $f(y) = \sup_{x \in X} f(x)$, et donc f est maximal en y. $\square$

Thm: $S \subset \mathbb{R}^k$ est compact ssi S est fermé et borné

[borné: $\exists R > 0$ tq $S \subset B_{\mathbb{R}^k}(0, R)$]

Preuve: $\Leftarrow$: On suppose $S \subset \mathbb{R}^k$ est fermé et borné

Soit $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,k}) \in S \subset \mathbb{R}^k$ une suite où $x_{n,i} \in \mathbb{R}$

S est borné $\Rightarrow$ la suite $x_{n,i} \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) est bornée

$\Rightarrow \exists$ une sous-suite convergente. Soit $y_n \in S$ une sous-suite de x_n tq la suite y_n converge dans $\mathbb{R}$.

On répète: soit $z_n \in S$, une ss-suite, de y_n tq z_n converge dans $\mathbb{R}$. Etc.

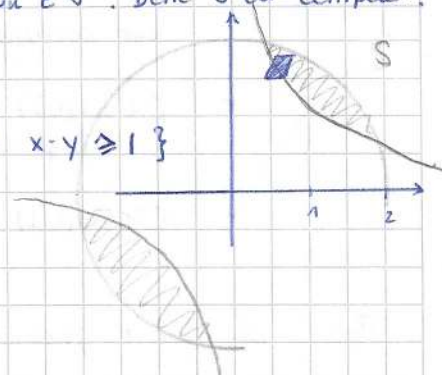
Enfin: Soit w_n une sous-suite de x_n tq les suites $w_{n,i}$ ($i=1, \dots, k$) converge, c-à-d w_n converge dans $\mathbb{R}^k$

Car S est fermé et $w_n \in S$ $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \in S$. Donc S est compact.

$\Rightarrow$: Exercice facile

Exemple: $S \subset \mathbb{R}^2$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } x-y \geq 1\}$

fermé et borné $\Rightarrow$ compact.



Remarque: Si $f: S \rightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto \sin(x+e^y) + \cos(xy)$ est une fonction continue,

alors f atteint son max et son min.

3.6 Espaces Complètes

Rappel: Si $x_n \in \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy, alors x_n converge.

Déf: Si X est un esp. métrique et $x_n \in X$ est une suite, alors elle est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall k, l \geq n_0, d(x_k, x_l) < \varepsilon$

Déf: Un esp. métrique X est complet si toute suite de Cauchy dans X converge.

Ex:

- $X = \mathbb{R}$ complet
- $X = \mathbb{R}^k$ complet parce que si $x_n \in \mathbb{R}^k$ est de Cauchy alors $\forall i=1, \dots, k$ la suite $x_{ni} \in \mathbb{R}$ est de Cauchy $\Rightarrow x_{ni}$ converge $\Rightarrow x_n$ converge.

Proposition: Si X est complet et $S \subset X$ est fermé, alors S est un esp. métrique complet.

Preuve: Si $s_n \in S$ est de Cauchy, elle converge dans X (car X est complet) et car $S \subset X$ est fermé $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \in S$ $\blacksquare$

Ex:

- si $S \subset \mathbb{R}^k$ est fermé alors S est complet.
- Si A est un ensemble, alors $B(A) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ est bornée}\}$ ^{avec la norme} $\|f\|_\infty$ est complet. (le Critère de Cauchy pour conv. unif)
- $C([a,b]) \subset B([a,b]) \Rightarrow C([a,b])$ avec $\|f\|_\infty$ est complet.
 $\uparrow$ fermé $\uparrow$ complet
- $C^1([a,b])$ avec $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est complet (Ex: avec $(\lim f_n)' = \lim f_n'$)

Thm: du point fixe de Banach.

Soit X un espace métrique complet, $f: X \rightarrow X$ une contraction,
(c-à-d $\exists r < 1$ tq $d(fx, fy) \leq r \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in X$), alors $\exists! x \in X$
tq $fx = x$.

Preuve: Unicité: si $f(x) = x$ et $f(x') = x'$, on a $d(x, x') \leq r d(x, x')$
et donc $d(x, x') = 0 \Rightarrow x = x'$

Existence: Soit $x_0 \in X$, on pose $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2) \dots$

On va Mq x_n converge vers un point fixe de f .

• Mq $x_n, n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy:

$$\text{On a } d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq r d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) \leq r \cdot d(x_2, x_1) \leq r^2 d(x_1, x_0)$$

$$d(x_4, x_3) \leq r^3 d(x_1, x_0) \text{ et } d(x_{n+1}, x_n) \leq r^n d(x_1, x_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } k > L \text{ alors } d(x_k, x_L) &\leq d(x_k, x_{k-1}) + d(x_{k-1}, x_{k-2}) + \dots + d(x_{L+1}, x_L) \\ &\leq (r^{k-1} + r^{k-2} + \dots + r^L) d(x_1, x_0) \leq d(x_1, x_0) \cdot r^L (1 + r + r^2 + \dots) \\ &= d(x_1, x_0) r^L \cdot \frac{1}{1-r} = r^L \frac{d(x_1, x_0)}{1-r} \end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 0$ alors $\forall L$ assez grand on a $d(x_k, x_L) < \varepsilon$
et donc la suite x_n est de Cauchy.

X est complet, donc x_n converge, on a $x_{n+1} = f(x_n)$

f est continue (lipschitzienne) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \text{ et donc si } x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

On trouve que $x = f(x)$ ■

3.7 Equivalence de normes

Rappel: Si N_1 et N_2 sont des normes sur V ($N_{i,2} V \rightarrow \mathbb{R}^+$)

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si $\exists C, C' > 0$ tq

$$N_1(v) \leq C N_2(v) \quad \text{et} \quad N_2(v) \leq C' N_1(v) \quad \forall v \in V$$

Thm: Toute norme N sur $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la norme euclidienne $\|\cdot\|$.

Preuve: • $N(v) \leq C \cdot \|v\|$: si $e_i (i=1, \dots, n)$ est la base (standard) de $\mathbb{R}^n$

On a $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ $v = (v_1, \dots, v_n)$

$$N(v) = N(\sum v_i e_i) \leq \sum N(v_i e_i) = \sum |v_i| N(e_i) \leq \max_{i=1, \dots, n} N(e_i) \sum |v_i|$$

$$= \max N(e_i) \|v\|_1 \leq \max N(e_i) \cdot n \cdot \|v\|_\infty \leq \underbrace{(\max N(e_i)) n}_{=C} \cdot \|v\|$$

• $\|v\| \leq C' \cdot N(v)$: si $v, w \in V$ alors $|N(v) - N(w)| \leq N(v-w) \leq C \cdot \|v-w\|$
 $\Rightarrow N: v \rightarrow \mathbb{R}^+$ est lipschitzienne, donc continue.

Soit $S = \{v \in \mathbb{R}^n; \|v\| = 1\}$ (sphère unitaire)

On a $S \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et borné $\Rightarrow S$ compact $\Rightarrow \exists \min$ de N sur S , c-à-d $\exists v_0 \in S$ tq $\forall v \in S$ $N(v) \geq N(v_0) > 0$ (car $v_0 \neq 0$)

Si $w \in \mathbb{R}^n$, si $w \neq 0$, on pose $v = \frac{w}{\|w\|}$ alors $\|v\| = 1$

et donc $N(v) = N\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = \frac{1}{\|w\|} N(w) \geq N(v_0)$

et donc $\forall w \neq 0$ $N(w) \geq N(v_0) \cdot \|w\|$ c-à-d

$$\|w\| \leq \frac{1}{N(v_0)} \cdot N(w) \quad \text{on peut dire } C' = \frac{1}{N(v_0)}$$

C'est aussi vrai pour $w = 0$.

Résumé de la partie 3:

Vocabulaire: métrique; norme; sous-ens. ouvert et fermé, esp. métrique compacts, $\neq$ complets.

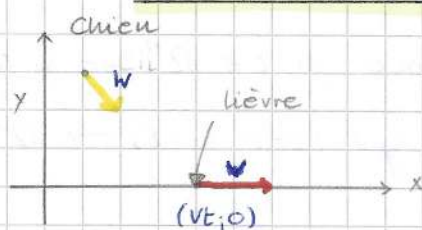
Théorème: f est continue $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$ est ouvert $\forall U$ ouvert

$S \subset \mathbb{R}^n$ compact $\Leftrightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ fermé et borné

Si S est compact et $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $\exists$ max et min de f sur S .

4. Équations différentielles ordinaires.4.1 Introduction.

Ex:



Vitesse du Chien:

$$w = \frac{(v(t) - x(t), -y(t))}{\sqrt{(v(t) - x(t))^2 + y^2(t)}} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right)$$

équation diff. ordinaire.

Le problème (de la valeur initiale): trouver les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ si $x(0)$ et $y(0)$ sont donnés.



$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -ky - L \frac{dy}{dt} \quad k, L > 0 \text{ const.}$$

Le problème: trouver la fonction $y(t)$ si $y(0)$ et $y'(0)$ sont donnés

On peut remplacer $my'' \stackrel{(*)}{=} -ky - Ly'$ par:

(on introduit $p(t) = my'(t)$ et $(*)$ devient) $y'(t) = \frac{p(t)}{m}$

$$p'(t) = -ky(t) - \frac{L}{m} p(t)$$

le problème: trouver $y(t)$ et $p(t)$ si $y(0)$ et $p(0)$ sont donnés.

Déf: Soit $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, alors l'équation

$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$ par une fonction (inconnue) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

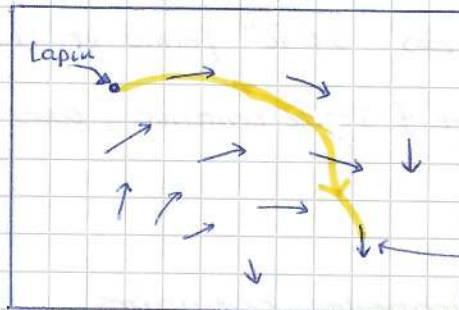
est une équa diff ordinaire (EDO). le problème de la valeur initiale: trouver $y(t)$ si $y(0) \in \mathbb{R}^n$ est donné.

Explications: si $y(t) = (y_1(t); y_2(t); \dots; y_n(t))$ $y_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

et si $f = (f_1; f_2; \dots; f_n)$ $f_i: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$

alors (*) est $y'_i(t) = f_i(t; y_1(t); \dots; y_n(t)) \quad \forall i=1, \dots, n$

Visualisation: (pour $n=2$) $\mathbb{R}^2$



f est un champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ qui dépend aussi du temps

$f(t; x_1, x_2, \dots, x_n)$

recherche de la trajectoire.

Thm: (existence et unicité)

Soit $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, si $c \in \mathbb{R}^n$ et si $t_0 \in \mathbb{R}$

alors $\exists \varepsilon > 0$ et une fonction $y: (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tq

$y(t_0) = c$ et $y'(t) = f(t; y(t))$

Si f est localement lipschitzienne alors y est unique.

Preuve: Analyse II

Idee (pour l'existence):

Si $h > 0$, (petit) on définit une fonction (solution approximative)

$y_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $y_n(t_0) = c$ $y_n(t_0 + h) = y_n(t_0) + h \cdot f(t_0; y_n(t_0))$

$y_n(t_0 + (m+1)h) = y_n(t_0 + mh) + h \cdot f(t_0 + mh; y_n(t_0 + mh))$

(Interpolation linéaire) ? Est-ce que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ existe?

On peut montrer: $\exists$ sous-suite de y_n qui converge unif

et dont la limite est une solution "■"

Remarque: Une EDO d'ordre k est $y^{(k)}(t) = f(t; y(t); y'(t); \dots; y^{(k-1)}(t))$

On peut remplacer (*) par une équation diff d'ordre 1

si on pose $Y(t) = (y(t); y'(t); \dots; y^{(k-1)}(t)) = (y_i; p_i; \dots; p_{k-1})$

alors (*) est équivalente à $y'(t) = p_1(t), p_1'(t) = p_2(t), \dots, p_{k-1}'(t) = \dots$

$= f(t; y; p_1; \dots; p_{k-1})$ EDO ordre 1 pour Y

Rq: (suite) le problème de la valeur initiale pour (*):

trouver $y, p_1, \dots, p_{k-1}$ si $y(0), p_1(0), \dots, p_{k-1}(0)$ sont donnés
c-à-d trouver $y(t)$ si $y(0), y'(0), y''(0), \dots, y^{(k-1)}(0)$ sont donnés.

4.2 Méthodes de solutions.

4.2.1 EDO Autonomes

Déf: Une EDO autonome est une équation de la forme

$$y'(t) = f(y(t)) \text{ où } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

ici: le cas de $n=1$

visualisation:

le problème: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée,

on cherche $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq

$$y'(t) = f(y(t))$$

solution: si $f \neq 0$ et si $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est tq $H' = \frac{1}{f}$

$$\text{alors } \frac{y'(t)}{f(y(t))} = [H(y(t))]'$$

et donc (t) est: $H(y(t))' = 1$, c-à-d $H(y(t)) = t - c$

$$\text{et donc } y(t) = H^{-1}(t - c)$$

On écrit ce calcul:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \Rightarrow \frac{dy}{f(y)} = dt \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int dt \Rightarrow H(y) = t \pm c$$

Ex:

$$f(y) = 1 + y^2 \text{ alors } y' = 1 + y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dt.$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dt \Leftrightarrow \arctan(y) = t - c \Leftrightarrow y(t) = \tan(t - c)$$

les solutions $y(t) = \tan(t - c)$ existent sur les intervalles

$$(c - \frac{\pi}{2}; c + \frac{\pi}{2})$$

Rappel: $\frac{dy}{dt} = f(y)$ (*) $\int \frac{dy}{f(y)} = \int dt$

ou si $f \neq 0$ si $c \in \mathbb{R}$ est tq $f(c) = 0$

$y(t) = c$ $\forall t$ est une solution de (*)

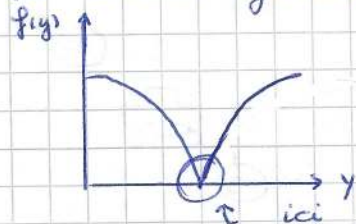
Ex: (non-unicité)

$$\frac{dy}{dt} = y^{2/3} \quad \int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int dt = t - t_0$$

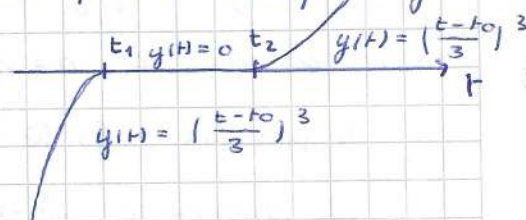
$$3y^{1/3} = t - t_0 \Rightarrow y = \left(\frac{t - t_0}{3}\right)^3$$

est une solution de (*) $\forall t$ aussi pour $t = t_0$ quand $y(t) = 0$

La solution générale de (*):



$$f(y) = y^{2/3}$$



ici f n'est pas localement Lipschitzienne.

Ex: Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\frac{dy}{dt} = ay$

$$\int \frac{dy}{ay} = \int dt$$

$$\frac{1}{a} \log|y| = t + c$$

$$y = \pm e^{at+c} = \pm \tilde{c} e^{at}$$

Propo: Si $a \in \mathbb{C}$, alors les solutions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\frac{dy}{dt} = ay$ sont $y(t) = c \cdot \exp(at)$, $c \in \mathbb{C}$

Preuve: On pose $z(t) = y(t)e^{-at}$, c-à-d $y(t) = z(t)e^{at}$

$$y'(t) = [z(t)e^{at}]' = z'(t)e^{at} + z(t) \cdot a \cdot e^{at} = ay = aze^{at}$$

et donc (*) $\Leftrightarrow z' = 0$ c-à-d $z(t)$ est une cst

4.2.2 Séparations de variables.

Méthode: Pour EDO de la forme $\frac{dy}{dt} = f(y) \cdot g(t)$

si $f(y) \neq 0$

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t), \text{ c'est-à-dire } H(y(t))' = g(t)$$

où H est une primitive de $1/f$ et donc $H(y(t)) = G(t) + c$

où G est primitive de g et donc

$$y(t) = H^{-1}(G(t) + c)$$

On écrit ce calcul:

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \cdot g(t) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t) dt \Leftrightarrow H(y) = G(t) + c$$

$$\Leftrightarrow y = H^{-1}(G(t) + c)$$

Ex:

$$\frac{dy}{dt} = t \cdot y \quad \int \frac{dy}{y} = \int t dt \quad \log |y| = \frac{1}{2} t^2 + c$$

$$\text{et } y(t) = \pm e^{\frac{t^2}{2} + c} = \pm \tilde{c} e^{\frac{t^2}{2}}$$

4.2.3 EDO linéaire d'ordre 1.

$a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont donnés, on veut résoudre $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

Préparation: si $b=0$, on peut utiliser la sép. des variables

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(t) dt = A(t) \quad \dots \quad y(t) = c \exp(A(t))$$

Méthode: Variation des constantes.

une primitive
de $a(t)$

pour résoudre (*), on pose $y(t) = z(t) \exp(A(t))$

$$\text{On obtient } y' = (z' + az) \exp(A) \stackrel{!}{=} az e^A + b$$

$$z' = b \cdot \exp(-A) \Rightarrow z(t) = \left[\int b(t) e^{-A(t)} dt \right] + c$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{A(t)} \cdot \left(c + \int b(t) e^{-A(t)} dt \right)$$

Ex:

$$y' = t^a y + t^b$$

$$a(t) = t$$

$$A(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$\int b(t) e^{-A(t)} dt = \int t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \stackrel{s = \frac{t^2}{2}}{\text{CDV}} = -(t^2 + 2) e^{-\frac{t^2}{2}} + c$$

$$y(t) = e^{A(t)} \int b(t) e^{-A(t)} dt = -(t^2 + 2) + c e^{\frac{t^2}{2}} \quad (e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} = e^0)$$

4.2.4 les EDO Homogènes:

Et la méthode de symétrie:

Observation: $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ est autonome ssi la substitution

$y \rightarrow y, t \rightarrow t + c \quad (c \in \mathbb{R})$ ne change pas.

Déf: EDO homogène: EDO de la forme $\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{t}\right)$ (*)

la substitution $y \rightarrow cy$ et $t \rightarrow ct$ ne change pas (*)

(c'est une symétrie de (*))

Idee: On cherche des variables z, s (qui remplacent y, t)

sq la transformation (*) devient $z \rightarrow z$ et $s \rightarrow s + \tilde{c}$

Et on obtient une EDO autonome (qu'on peut résoudre)

On choisit $z = y/t$ et $s = \log t$

On a donc $t = e^s \quad y = e^s \cdot z$

(*) devient $\frac{dy}{dt} = \frac{de^s z}{de^s} = \frac{e^s dz + z e^s ds}{e^s ds} = \frac{dz}{ds} + z \stackrel{!}{=} f(z)$ EDO autonome

Ex: $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + \frac{t}{y}$

$$\frac{dz}{ds} + z = z + \frac{1}{z} \quad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{z} \quad \int z dz = \int ds$$

$$\frac{1}{2} z^2 = s + c \quad z = \sqrt{2(s + c)}$$

$$y(t) = tz = t \sqrt{2(\log t + c)}$$

Ex: $\frac{dy}{dt} = t + \frac{y^2}{t^3} \quad y \rightarrow c^2 y \quad t \rightarrow c \cdot t$ est une symétrie

On cherche z et s sq $z \rightarrow z$ et $s \rightarrow s + \tilde{c}$ On pose $z = \frac{y}{t^2}$

et $s = \log t \quad t = e^s \quad y = e^{2s} \cdot z \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d(e^{2s} \cdot z)}{de^s} = \frac{e^{2s} dz + 2e^{2s} z ds}{e^s ds}$

Ex: (suite) $\frac{dy}{dt} = \dots = e^s \left(\frac{dz}{ds} + 2z \right) = e^s + e^s \cdot z^2$

On a donc $\frac{dz}{ds} + 2z = 1 + z^2 \quad \frac{dz}{ds} = (z-1)^2$

$\int \frac{dz}{(z-1)^2} = \int ds = s + c$

$\Rightarrow -\frac{1}{z-1} \Rightarrow z = 1 - \frac{1}{s+c}$

et donc: $y(t) = t^2 z = t^2 \left(1 - \frac{1}{s+c} \right) = t^2 \left(1 - \frac{1}{\log t + c} \right)$

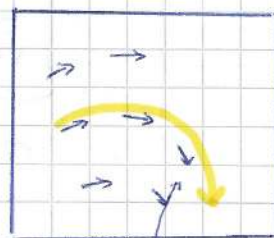
4.2.5 Réduction d'ordre.

En général:

EDO AUTONOME

$\frac{dy}{dt} = f(y) \quad f = (f_1, f_2) \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$y = (y_1, y_2) \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$



On cherche $y_i (i \geq 2)$ comme une fonction

de y_1 .

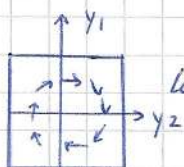
(idée: trouver traj. sans paramétrisation par t)

On obtient $\frac{dy_i}{dy_1} = \frac{dy_i/dt}{dy_1/dt} = \frac{f_i(y_1, y_2, \dots, y_n)}{f_1(y_1, y_2, \dots, y_n)}$

un système de EDO avec $n-1$ inconnue $(y_1, \dots, y_n)$.

Ex:

$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = -y_1 \quad (\text{la rotation du plan } \mathbb{R}^2)$



la méthode donne: $\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{-y_1}{y_2} \quad \int y_2 dy_2 = \int y_1 dy_1$

$y_1^2 = y_2^2 = R^2$ (une constante, c-à-d le rayon)

$\Rightarrow$ la trajectoire est un cercle centré en 0 et de rayon R.

Méthode: pour EDO autonomes d'ordre 2

$y'' = f(y, y')$ ($y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) remplacer par système d'ordre 1

$y' = p \quad p' = f(y, p) \quad \frac{dy}{dt} = y' = p \quad \frac{dp}{dt} = p' = f(y, p) \quad \text{autonome}$

$\frac{dp}{dy} = \frac{f(y, p)}{p}$ d'ordre 1.

Ex:

pendule avec frottement

$$y'' = -\sin y - k y' \quad (k \geq 0) \quad \text{on pose } p = y'$$

et donc $\frac{dp}{dy} = \frac{-\sin y - kp}{p}$

si $k=0$ (frottement)

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{\sin y}{p}$$

$$\int p dp = \int -\sin y dy$$

$$\frac{1}{2} p^2 - \cos y = E \quad (\text{une cst})$$

$$p = \sqrt{2(E + \cos y)} = \frac{dy}{dt}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2(E + \cos y)}} = \int dt = t + c$$

pas une fonction élémentaire (Intégrale elliptique)

le 10.04.18

4.3 EDO à coefficients constants

Supposons que $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, on cherche les solutions

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{de} \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0 \quad *$$

Observation: $y \mapsto Ly = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y$ ($y \in C^\infty(\mathbb{R})$)

$L: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ est une application linéaire

Prop: les solutions de $*$ forment un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$

Preuve: • Toute solution est dans $C^\infty(\mathbb{R})$
parce qu'on peut calculer toutes les dérivées de y

$$y^{(n)} = -a_{n-1} y^{(n-1)} - \dots - a_0 y \quad \text{et} \quad y^{(n+1)} = -a_{n-1} y^{(n)} - a_{n-2} y^{(n-1)} - \dots - a_0 y'$$

$$\bullet \text{ L'espace des solutions } = \{ y \in C^\infty(\mathbb{R}) ; Ly = 0 \} = \text{Ker}(L)$$

donc c'est un sous-espace vect de $C^\infty(\mathbb{R})$

$$\text{Si } Ly_1 = 0 \text{ et } Ly_2 = 0 \text{ alors } L(y_1 + y_2) = 0$$

$$\text{et si } Ly = 0 \text{ et } c \in \mathbb{R} \text{ et donc } L(cy) = 0$$

Déf: le polynôme caractéristique de $(*)^{p.44}$ est $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$

Observation: si $\lambda \in \mathbb{C}$ $L(e^{\lambda t}) = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0) e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}$

$$\text{Alors } Le^{\lambda t} = 0 \iff P(\lambda) = 0$$

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ sont les racines de $p(\lambda)$, alors

$$L(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_k e^{\lambda_k t}) = 0 \quad \forall c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$$

Thm: Si $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ est le polynôme caract.

de L , alors les solutions y de $Ly = 0$ sont

$$y(t) = q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + q_k(t)e^{\lambda_k t} \text{ où } q_i \text{ est un polynôme tq}$$

$\deg q_i \leq n_i - 1$. Les q_i sont uniquement déterminés

par y et donc $\{t^L e^{\lambda_i t}; L \leq n_i - 1, i = 1, \dots, k\}$ est une base

de l'espace des solutions. La dimension de l'espace de solutions

$$\text{est } n_1 + \dots + n_k = n.$$

Remarque: • Si les racines de p sont simples ($n_1 = n_2 = \dots = n_k = n = 1$)

alors les solutions sont $c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$ ($c_i \in \mathbb{C}$)

• Si les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont réels (et donc aussi,

et si $\lambda = \alpha + i\beta$ est une racine de p avec $\beta \neq 0$

alors $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ est aussi une racine.

Alors on peut remplacer $e^{\lambda t}$ et $e^{\bar{\lambda} t}$ par leur combinaison linéaire $e^{\alpha t} \cos \beta t$ et $e^{\alpha t} \sin \beta t$.

Preuve:

• cas particulier: $Ly = y^{(n)}$ (c-à-d: $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$)

ici $P(\lambda) = \lambda^n$, les solutions de $y^{(n)} = 0$ sont les polynômes $q(t)$ tq $\deg(q) \leq n-1$.

Preuve par récurrence: $n=1$ $y' = 0 \iff y = c$ (c-à-d $\deg=0$)

Preuve: (suite) Supposons que c'est vrai pour n et montrons pour $n+1$

On cherche les solutions de $y^{(n+1)} = 0$, c-à-d.

$$(y')^{(n)} = 0 \Leftrightarrow y' \text{ est un polynôme de } \deg \leq n-1$$

c-à-d y est la primitive d'un polynôme de $\deg \leq 1$

c-à-d y est un polynôme de $\deg \leq n$

Notation: $Dy = y'$ $D: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ (applic. linéaire)

$$L = p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0$$

Preuve: (suite)

- Cas particulier: $p(\lambda) = (\lambda - c)^n$ $c \in \mathbb{C}$

$$L = p(D) = (D - c)^n \text{ On a } D(e^{-ct}y) = (e^{-ct}y)' = -ce^{-ct}y + e^{-ct}y'$$

$$= e^{-ct}(-cy + y') = e^{-ct}(D - c)y \text{ et donc}$$

$$D^n(e^{-ct}y) = e^{-ct}(D - c)^n y \text{ et donc } (D - c)^n y = 0$$

$$\Leftrightarrow D^n(e^{-ct}y) = 0 \Leftrightarrow y(t) = q(t)e^{ct}, \deg(q) \leq n-1$$

- Cas général: $p(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$

$$\text{Si } \deg q_i \leq n_i - 1, \text{ on a } (D - \lambda_i)^{n_i} q_i(t)e^{\lambda_i t} = 0$$

$$\Rightarrow p(D) \sum_{i=1}^k q_i(t)e^{\lambda_i t} = 0 \Rightarrow p(D) \sum_{i=1}^k q_i(t)e^{\lambda_i t} = 0$$

Il faut encore mq toute solution de $p(D)y = 0$ est de

$$\text{la forme } \sum_{i=1}^k q_i(t)e^{\lambda_i t} \quad \deg q_i \leq n_i - 1$$

Lemme: $\exists$ polynômes $r_1, \dots, r_k$ tq $r_1 + \dots + r_k = 1$ et tq $p(\lambda) \mid r_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$

Preuve: décomp en fractions partielles: $\frac{1}{p(\lambda)} = \frac{S_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{n_1}} + \dots + \frac{S_k(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{n_k}}$

$\exists S_1, \dots, S_k$ tq

$$\text{donc } 1 = \sum_{i=1}^k S_i(\lambda) \frac{p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{n_i}} =: \sum_{i=1}^k r_i(\lambda)$$

Analyse I:

le 10.04.18

Preuve: (suite.)

Supposons $p(D)y = 0$, alors $(y = \sum_{i=1}^k r_i(D)y)$

$$\frac{(D - \lambda_i)^{n_i} r_i(D)y}{s(D)p(D)} = 0 \quad \text{c-à-d} \quad r_i(D)y = q_i(t)e^{\lambda_i t} \quad \deg q_i \leq n_i - 1$$

$$\text{et donc } y = \sum_{i=1}^k r_i(D)y = \sum_{i=1}^k q_i(t)e^{\lambda_i t}$$

On a $q_i(t) = e^{-\lambda_i t} r_i(D)y$, donc q_i est déterminé par y ■

Ex:

$$y'' + y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Base de l'espace des solutions: e^{it}, e^{-it}

$$\text{Solutions: } c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$$

Une autre base: $\cos(t), \sin(t) \rightarrow$ solutions: $\tilde{c}_1 \cos(t) + \tilde{c}_2 \sin(t)$

$$y'' + 2\alpha y' + y = 0 \quad \alpha \geq 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1 \quad \text{les racines: } \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$$

$$\text{si } \alpha < 1: \alpha^2 - 1 < 0 \quad \text{base: } e^{-\alpha t} \begin{matrix} \cos(\sqrt{1-\alpha^2} t) \\ \sin(\sqrt{1-\alpha^2} t) \end{matrix}$$

$$\text{si } \alpha > 1: \alpha^2 - 1 > 0 \quad \text{base: } e^{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} t}, e^{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1} t}$$

$$\text{si } \alpha = 1: \alpha^2 - 1 = 0 \quad p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \quad \lambda_{1,2} = -1$$

$$\text{solutions: } c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} = (c_1 + c_2 t) e^{-t}$$

Supposons que $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et on cherche les solutions de $p(D)y = b$ *
EDO lin inhomogène.

Prop: Si y_0 est une solution de *, alors les sol de notre équation sont $y = y_0 + y_1$ où $p(D)y_1 = 0$

Preuve: $p(D)y = b \Leftrightarrow p(D)y = p(D)y_0 \Leftrightarrow p(D)(y - y_0) = 0 \quad y_1 = y - y_0$ ■

Suite prop: Méthode:

le cas $b(t) = r(t)e^{\mu t}$ r polynôme et $\mu \in \mathbb{C}$

1. si $p(\mu) \neq 0$ $\exists$ une sol y_0 de $p(D)y_0(t) = r(t)e^{\mu t}$
de la forme $y_0(t) = s(t)e^{\mu t}$ tq $\deg(s) = \deg(r)$
2. si $p(\mu) = 0$ et si m est la multiplicité de la racine μ de p
 $\exists$! solution de la forme $y_0(t) = t^m s(t)e^{\mu t}$ où $\deg(s) = \deg(r)$.

Preuve: $\mathbb{C}[t]_{\deg \leq k} = [\text{espace des polynômes avec } \deg \leq k]$

$$1) (p, \mu \neq 0) \quad p(D): e^{\mu t} \mathbb{C}[t]_{\deg \leq k} \rightarrow e^{\mu t} \mathbb{C}[t]_{\deg \leq k}$$

cette application est injective (le noyau est 0)

 $\Rightarrow$ elle est bijective et $\dim(e^{\mu t} \mathbb{C}[t]_{\deg \leq k}) = k+1$

$$\text{soit } r(t)e^{\mu t} \in e^{\mu t} \mathbb{C}[t]_{\deg \leq k} \Rightarrow \exists s \text{ tq } p(D)s(t)e^{\mu t} = r(t)e^{\mu t}$$

2) Exercice

Ex:

$$1) y'' + y' + y = \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{i \cdot 2}$$

$$\text{les sols de } y'' + y' + y = 0 : p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}it} + c_2 e^{-\frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}it} = (c_1 e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it}) e^{-\frac{t}{2}}$$

$$\text{une sol de } y'' + y' + y = e^{it} \quad \mu = i \quad p(i) \neq 0 \quad (m=0)$$

$$\exists \text{ une sol de la forme } ce^{it} = y_0$$

$$y_0'' + y_0' + y_0 = c(-1 + i + 1)e^{it} = cie^{it} \stackrel{!}{=} e^{it} \Rightarrow c = -i$$

$$\Rightarrow y_0 = -ie^{it}$$

$$\text{une sol de } y'' + y' + y = e^{-it} \text{ est } \bar{y}_0 = ie^{it}$$

$$\Rightarrow \text{une sol } y'' + y' + y = \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$\text{est } \frac{y_0 - \bar{y}_0}{2i} = \frac{-ie^{it} - ie^{-it}}{2i} = -\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) = -\cos(t)$$

$$\text{Plus rapide: } \sin(t) = \text{Im} e^{it}$$

$$\text{on a } y_0'' + y_0' + y_0 = e^{it} \text{ alors } \text{Im} y_0 = -\cos t$$

$$\text{est une sol de } y'' + y' + y = 0$$

Ex:

1) suite

Solution générale de $y'' + y' + y = \sin(t)$ est

$$y(t) = -\cos t + C_1 e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_2 e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

2) $y'' + y = \sin(t)$ les sols de $y'' + y = 0$ $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ $\lambda_{1,2} = \pm i$

$$y_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

$$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{it}) \quad \mu=1 \text{ est racine de } p, m=1$$

une solution de $y'' + y = e^{it}$ [sol de la forme $c \cdot t \cdot e^{it}$

$$\text{et } (cte^{it})'' + (cte^{it}) = e^{it} \Rightarrow 2ic = 1 \quad c = -\frac{i}{2}$$

 $\Rightarrow \operatorname{Im}(-\frac{i}{2} t \cdot e^{it})$ est une solution de $y'' + y = \sin t$

$$= \operatorname{Im}(-\frac{i}{2} t (\cos t + i \sin t)) = -\frac{t}{2} \cos t$$

la sol générale de $y'' + y = \sin t$ est

$$y(t) = -\frac{t}{2} \cos t + C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

Méthode: pour résoudre $p(D)y = b(t)$ 1) trouver les sols de $p(D)y = 0$ 2) trouver une solution de $p(D)y = b(t)$

3) faire la somme

4.4 Systèmes d'EDO linéaires à coeff constant:

Supposons : A est une matrice $n \times n$, on cherche les sds $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$

de $y' = Ay$ (*)
c-à-d si $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, alors (*) est $y_i' = \sum_{j=1}^n A_{ij} y_j$

Prop: les sds de (*) forment un espace vectoriel

Preuve: l'application $y \mapsto y' - Ay$ est linéaire et l'espace des sds est le noyau de cette dernière.

Thm: (problème des valeurs initiales)

$$\forall v \in \mathbb{C}^n \exists! \text{ sd } y \text{ de (*) tq } y(0) = v$$

Remarque: la dimension de l'espace des sds est n

Méthode: Prop: Si $v \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A , $Av = \lambda v$ $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $y(t) = e^{\lambda t} v$ est une solution.

Si A est diagonalisable, c-à-d si $\exists$ base $v_1, \dots, v_n$ tq v_i est vecteur propre de A ($\forall i=1, \dots, n$) alors toutes solutions est de la forme : $\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i$

Preuve: $(e^{\lambda t} v)' = \lambda e^{\lambda t} v = A e^{\lambda t} v \Rightarrow e^{\lambda t} v$ est une solution.

Si A est diagonalisable : si y est une sd de $y' = Ay$ et si $y(0) = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, alors $\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i$ est une solution et $\tilde{y}(0) = \sum_{i=1}^n c_i v_i = y(0)$ (par thm précédent)
 $\Rightarrow y = \tilde{y}$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

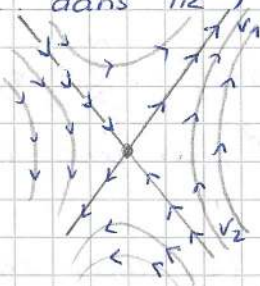
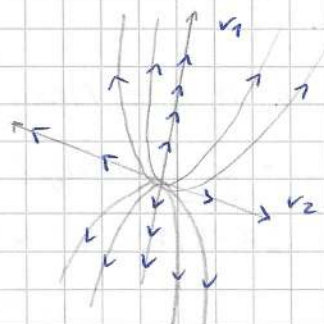
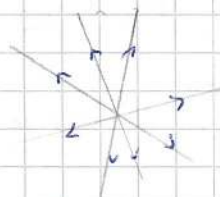
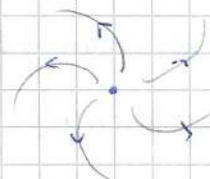
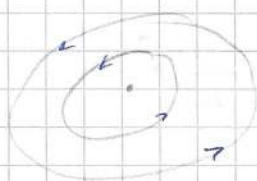
$$P(\lambda) = \det(\lambda - A) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1$$

Valeurs propres = $\{-1, 2\}$. Les vecteurs propres: $\lambda_1 = -1$: $Av_1 = \lambda_1 v_1 = -v_1$
 $\lambda_2 = 2$: $A - \lambda_1 = A + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $A - \lambda_2 = A - 2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

les solutions sont : $c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Analyse I.

Ex: (suite)

Solution: tq $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:On cherche c_1, c_2 tq: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $c_1 = -\frac{1}{3}$ $c_2 = \frac{2}{3}$ Ex: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $y_1' = y_2$ $y_2' = -y_1$ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i) \Rightarrow A$ diagonalisable $\lambda_1 = i$: $A - iI = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = -i$: $A - (-i)I = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ Solutions: $c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$)y tq $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ solution $y(t) = \frac{1}{2} [e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$ Dessins: (pour $n=2$ dans $\mathbb{R}^2$)si: $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$:si: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$:si: $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$:si: $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$ ($\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$) si $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ si: $\lambda_1 \in i\mathbb{R}$ 

Rappel: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

le 17.04.18

Et on veut résoudre $y' = Ay$ $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$

Si $v \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $Av = \lambda v$, alors $y(t) := e^{\lambda t} v$ est une solution (si A diagonalisable)

Si A n'est pas diagonalisable, on peut utiliser des vecteurs propres généralisés $(A - \lambda)^n v = 0$ (Mieux: exponentielle de matrice)

Déf: Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ alors $\text{Exp}(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calculons $\text{Exp}(t \cdot A)$ où $t \in \mathbb{R}$

$$A^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = -A, A^4 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^5 = A.$$

$$\begin{aligned} \text{Exp}(tA) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left(1 + (-\frac{t^2}{2!}) + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots \right) I + \\ &\quad \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots \right) A = \cos(t) I + \sin(t) A. \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \text{rotation d'angle } t. \end{aligned}$$

Rappel: si $v \in \mathbb{C}^N$, on pose $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^N |v_i|$ où $v = (v_1, \dots, v_N)$
pour $A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^n$, on pose $\|A\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |A_{ij}|$

Proposition: Soient $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ alors $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \cdot \|B\|_1$

Preuve: $\|AB\|_1 = \sum_{1 \leq i, k \leq n} |(AB)_{ik}| = \sum_{i, k} \left| \sum_j A_{ij} \cdot B_{jk} \right| \leq \sum_{i, j, k} |A_{ij}| |B_{jk}|$
 $\leq \sum_{i, j} |A_{ij}| \left(\sum_k |B_{jk}| \right) = \left(\sum_{i, j} |A_{ij}| \right) \left(\sum_{j, k} |B_{jk}| \right) = \|A\|_1 \cdot \|B\|_1.$

Théorème: la série $\text{exp}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge dans $M_{n \times n}(\mathbb{C})$
 $\forall A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

Preuve: Il faut montrer $\forall i, j \in [1, n]$, que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij}}{k!}$ converge.

$$\text{On a: } \frac{|(A^k)_{ij}|}{k!} \leq \frac{\|A^k\|_1}{k!} \leq \frac{\|A\|_1^k}{k!}$$

Comme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|_1^k}{k!}$ converge, alors la série converge aussi (absolument).

Analyse I:Propriétés: de $\exp(A)$

- $\exp(0) = 1 = I$ (identité)
- si $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ et si $AB = BA$
alors $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$. (Voir même preuve pour $A, B \in \mathbb{C}$)

En particulier, $\exp(A) \cdot \exp(A) = \exp(2A)$

et $\exp(A) \cdot \exp(-A) = \exp(0) = I$

Si Q est inversible, on a $\exp(Q A Q^{-1}) = Q (\exp A) Q^{-1}$
parce que $(Q A Q^{-1})^k = Q A^k Q^{-1}$

Prop.: $\exp(t \cdot A)$ (fonction $\mathbb{R} \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C})$) $t \mapsto \exp(tA)$.

Satisfait $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$ et $\exp(0A) = I$

Preuve: $\exp(t \cdot A) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!}$ est une série entière (en variable t) qui converge $\forall t$.

On a donc $\frac{d}{dt} \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1}}{k!} t^k = A \exp(tA)$.

Thm: Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

Alors $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $\exists!$ $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ tq $y' = Ay$. En fait $y(t) = \exp(tA) \cdot v$ (*)

Preuve: • (*) satisfait $y' = Ay$: $(\exp(tA) \cdot v)' = A \exp(tA) \cdot v$

• unicité de y : si $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, on pose $z(t) := \exp(-tA) y(t)$

c-à-d $y(t) = \exp(tA) z(t)$

On a $y'(t) = A \exp(tA) z(t) + \exp(tA) \cdot z'(t)$ c-à-d

$z'(t) = \exp(-tA) \cdot (y'(t) - Ay(t))$ Donc $y' = Ay \Leftrightarrow z'(t) = 0$

$\Leftrightarrow z(t) = v \quad \forall t \in \mathbb{R}$ est une constante dans $\mathbb{C}^n$ ▮

Comment calculer $\exp A$?

- Si $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est diagonale : $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$
et donc $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \exp \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp \lambda_n \end{pmatrix}$
- Si A est diagonalisable : $\left(\text{si } \exists Q \in \mathbb{M}_{n \times n} \text{ inversible tq } A = Q \Lambda Q^{-1} \right)$
 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
 $\exp(A) = \exp(Q \Lambda Q^{-1}) = Q \begin{pmatrix} \exp \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$
 Λ contient val propre.
 Q contient les vecteurs propres.

Ex : A non-diagonalisable : $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\quad \quad \quad = \Lambda \quad \quad \quad = N$

On peut voir : $\Lambda N = N \Lambda$, N est nilpotente $N^2 = 0$

$$\exp(t \cdot A) = \exp(t \Lambda) \exp(t N) = \begin{pmatrix} \exp t \lambda & 0 \\ 0 & \exp t \lambda \end{pmatrix} \left(1 + t N + \frac{t^2 N^2}{2!} + \dots \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \exp t \lambda & 0 \\ 0 & \exp t \lambda \end{pmatrix} (1 + t N)$$

Rem : $A = Q (\Lambda + N) Q^{-1}$, alors $\Lambda N = N \Lambda$ et $N^n = 0$
forme canonique de Jordan

alors on peut calculer explicitement $\exp(t A)$.

Rappel : Thm de Cayley - Hamilton

Si $p(x) := \det(xI - A)$ est le poly car de $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$, alors $p(A) = 0$

Algorithme pour calculer $\exp(t \cdot A)$.

Soit $p(x) = \det(xI - A) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$ la factorisation de p .

1) Trouver des polynômes $r_1, \dots, r_k$ tq $\sum_{i=1}^k r_i = 1$ et tq $p(x) / (x - \lambda_i)^{n_i} \cdot r_i(x)$

Comment trouver les r_i : $\frac{1}{p(x)} = \sum_{i=1}^k \frac{s_i(x)}{(x - \lambda_i)^{n_i}}$ (déc en f : partielles)

on pose $r_i(x) = \frac{p(x)}{(x - \lambda_i)^{n_i}} \cdot s_i(x)$

2) Comme $p(A) = 0$, on a $(A - \lambda_i)^{n_i} r_i(A) = 0$ et donc

$$\exp(t \cdot A) r_i(A) = e^{t \lambda_i} \exp(t(A - \lambda_i)) r_i(A) = e^{t \lambda_i} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l (A - \lambda_i)^l}{l!} r_i(A)$$

$$= e^{t \lambda_i} \sum_{l=0}^{n_i-1} \frac{t^l (A - \lambda_i)^l}{l!} r_i(A)$$

3) Finalement, $\exp(t \cdot A) = \sum_{i=1}^k \exp(t \cdot A) \cdot r_i(A)$

Analyse I:

le 17.04.18.

Ex: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$p(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -3 \quad (\text{Diagonalisable})$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{1/5}{x-2} + \frac{-1/5}{x+3} = \frac{1}{5(x-2)} - \frac{1}{5(x+3)}$$

$$r_1 = \frac{1}{5}(x+3) \quad r_2 = -\frac{1}{5}(x-2)$$

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(tA) r_1(A) + \exp(tA) r_2(A) \\ &= e^{2t} r_1(A) + e^{-3t} r_2(A) = \frac{1}{5} (e^{2t}(A+3) - e^{-3t}(A-2)) \end{aligned}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad p(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \quad \lambda_1 = -1$

(k=1) $r_1(x) = 1$ on a $(A+1)^2$ identité.

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= e^{-t} \cdot \exp[(A+1)t] = e^{-t} \cdot (1 + t(A+1)) \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 1+2t & 2t \\ -2t & 1-2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

le 18.04.18

Remarque: Si $V = \mathbb{C}^n$ et $A: V \rightarrow V$ lin

$$p(x) = \det(x-A) = (x-\lambda_1)^{n_1} \dots (x-\lambda_k)^{n_k}$$

$$\text{alors } V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \quad \text{où } V_i := \{v \in V, (A-\lambda_i)^{n_i} v = 0\}$$

et $V_i(A)$ est la projection de V sur V_i

$$V_i(A): V \rightarrow V \quad V_i(A)|_{V_i} = \text{id} \quad V_i(A)|_{V_{j \neq i}} = 0$$

Preuve: Exo

4.5 Systèmes d'EDO linéaires générales

Problème: Soit $A: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ une fonction continue, on cherche les solutions $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ de $y'(t) = A(t)y(t)$ et $y(0) = v$

Idée: Construire une suite y_k ($k=0,1,\dots$) de sds approximatives et mg $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ est une solution (Approximation de Picard)

$$y_0(t) = v \quad (\text{fonction const}) \quad y_1'(t) = A(t)y_0(t) \text{ et } y_1(0) = v$$

$$\text{c-à-d } y_1(t) = v + \int_0^t A(s)y_0(s) ds$$

$$y_{k+1}'(t) = A(t)y_k(t) \text{ et } y_{k+1}(0) = v$$

$$y_{k+1}(t) = v + \int_0^t A(s)y_k(s) ds$$

Il faut mg $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ est une solution.

Autrement dit, on construit une suite $M_k: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$: $M_0(t) = I$

$$M_{k+1}'(t) = A(t)M_k(t) \text{ et } M_{k+1}(0) = I$$

$$\text{c-à-d } M_{k+1}(t) = I + \int_0^t A(s)M_k(s) ds \quad (\text{On a } y_k(t) = M_k(t)v)$$

Ex: $A(t) = A$ une matrice constante

$$M_0(t) = I \quad M_1(t) = I + \int_0^t A ds = I + [As]_0^t = I + At$$

$$M_2(t) = I + \int_0^t A M_1(s) ds = I + At + A^2 t^2 / 2$$

$$M_k(t) = I + At + A^2 t^2 / 2 + A^3 t^3 / 3! + \dots + A^k t^k / k!$$

$$\text{ici } \lim_{k \rightarrow \infty} M_k(t) = \exp(At)$$

Thm: la suite des fonctions $M_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ converge vers une fonction $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ $\forall N > 0$, alors $M_k \rightarrow M$ uniformément sur $[-N, N]$. La limite M satisfait $M'(t) = A(t)M(t)$ et $M(0) = I$

Preuve: Supposons que $M_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M$ uniformément sur $[-N, N]$

$$M_k(0) = I \quad \forall k \Rightarrow M(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k(0) = I.$$

$$M_k'(t) = A(t) M_{k-1}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A(t) M(t) \text{ uniformément}$$

$$\Rightarrow M_k' \text{ converge. } M_k' \xrightarrow{k \rightarrow \infty} AM \text{ unif et } M_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M \text{ unif.}$$

$$\Rightarrow M' = AM. \text{ (échange dérivée et limite)} (\lim(M_k') = (\lim M_k)')$$

Explication: $M_k \rightarrow M$ unif veut dire:

$$(M_k)_{ij} \rightarrow (M)_{ij} \text{ unif.}$$

Rappel: $\|B\|_1 = \sum_{ij} |B_{ij}| \quad B \in M_{n \times n}(\mathbb{C}).$

Prenons $t \in [-N, N]$

$$M_k(t) - M_{k-1}(t) = \int_0^t A(s) (M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)) ds$$

$$\|M_k(t) - M_{k-1}(t)\|_1 \leq \int_0^t \|A(s)\|_1 \cdot \|M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)\|_1 ds.$$

Donc si $C := \max_{s \in [-N, N]} \|A(s)\|_1$, on a $\|M_k(t) - M_{k-1}(t)\|_1 \leq C \int_0^t \|M_{k-1}(s) - M_{k-2}(s)\|_1 ds$

On pose $M_{-1}(t) = 0$

On a donc $\|M_1(t) - M_0(t)\|_1 = \|I - 0\|_1 = n \quad \|M_2(t) - M_1(t)\|_1 \leq C \int_0^t n ds = Cn$

$$\|M_3(t) - M_2(t)\|_1 \leq C \int_0^t Cn ds = C^2 t^2 / 2 \cdot n$$

$$\|M_{k+1}(t) - M_k(t)\|_1 \leq C^k t^k / k! \cdot n \leq n C^k N^k / k!$$

Mais $\sum_{k=0}^{\infty} n C^k N^k / k! = n \exp(CN)$ converge, donc par le

Critère de Weierstrass $\sum_{k=0}^{\infty} (M_{k+1} - M_k)$ converge unif. $\blacksquare$

Thm: $\forall v \in \mathbb{C}^n \exists! y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ tq $y(0) = v$ et $y'(t) = A(t)y(t)$

Preuve: Mg $y(t) := M(t)v$ est une solution:

$$y(0) = M(0)v = v \quad y'(t) = M'(t)v = A(t)M(t)v = A(t)y(t)$$

Unicité: on peut mg $M(t)$ est inversible $\forall t$ (preuve dans polycop)

Si $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, on pose $z(t) = M^{-1}(t)y(t)$, c-à-d $y(t) = M(t)z(t)$

On a $y'(t) = M'(t)z(t) + M(t)z'(t) = A(t) \underbrace{M(t)z(t)}_{y(t)} + M(t)z'(t)$

$$M(t)z'(t) = y'(t) - A(t)y(t) \quad \text{Donc } y' = Ay \Leftrightarrow z' = 0$$

c-à-d $\Leftrightarrow z(t)$ est une constante $\blacksquare$

Résumé de la partie 4.

EDO non-linéaires:

- séparables $\rightarrow$ séparation des variables
- homogènes $\rightarrow$ méthode de symétrie ($z = \frac{y}{x}$ et $s = \log t$)
- $f(y, y') = y'' \rightarrow$ réduction d'ordre.

EDO Linéaires:

- $y'(t) = a(t)y(t) + b(t) \rightarrow$ variation de constante
- $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0 \rightarrow$ solutions $\sum q_i(t)e^{\lambda_i t}$
- $y'(t) = Ay(t)$, A matrice $n \times n \rightarrow$ vect/val propre et $\exp A$.

5. Fonctions de plusieurs variables.

Problème pratique: trouver les extremums locaux de $f(x, y) = x^2y + xy + y^3$

5.1 La différentielle et les dérivées partielles.

On va étudier des fonctions $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$ ($\text{ou } V \rightarrow W$)

Plus généralement, si $U \subset V$ est un ss-ensemble ouvert, on va étudier des fonctions $f: U \rightarrow W$

Déf: Soient $f: U \rightarrow W$ une fonction, $a \in U$, $v \in V$.

Alors la dérivée directionnelle $\partial_v f(a)$ est:

$$\partial_v f(a) = \left. \frac{d}{dt} f(a + tv) \right|_{t=0}$$

Si $x_1, \dots, x_k$ sont les coordonnées sur $\mathbb{R}^k = V$, alors les dérivées

partielles sont $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} := \partial_{e_i} f(a)$

Comment calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left. \frac{d}{dt} f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_k) \right|_{t=0}$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est la dérivée de f par x_i si les autres variables sont vues comme des constantes.

Ex: $f(x, y) = \sin(x + y + xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x + y + xy) \cdot (1 + 0 + y) = \cos(x + y + xy)(1 + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x + y + xy)(1 + x).$$

Remarque: si $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$ $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_L \end{pmatrix}$ $f_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_L}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

Déf: $f: U \rightarrow W$ est différentiable en $a \in U$ si $\exists$ une fonction linéaire $da_f: V \rightarrow W$ (appelée la différentielle de f) tq $f(a+h) = f(a) + da_f(h) + o(\|h\|)$, c-à-d si $f(a+h) = f(a) + da_f(h) + \|h\| r(h)$ où r est tq $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$

Prop: Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Preuve: $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) + 0 + \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| r(h) = f(a)$.

Remarque: Si $\partial_v f(a)$ existe $\forall v \in V$, cela n'implique pas que f est continue en a .

le 24.04.18

Rappel:

- dérivée partielle: $\frac{\partial f}{\partial x}$
- dérivée directionnelle: $\partial_v f := \frac{d}{dt} f(a+tv) \Big|_{t=0}$
- différentielle: $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$, $a \in \mathbb{R}^k$ $da_f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$ linéaire tq $f(a+h) = f(a) + da_f(h) + o(\|h\|)$

Prop: Si f est différentiable (si da_f existe), alors $\forall v \in \mathbb{R}^k$ on a $\partial_v f(a) = da_f(v)$. En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = da_f(e_i)$

Preuve: $\partial_v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + \underbrace{tv}_{h}) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{da_f(tv) + o(\|tv\|)}{t} = da_f(v) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(\|t\| \|v\|)}{t} = da_f(v)$

Cor: Supposons que da_f existe. Alors:

- si $v = \sum_{i=1}^k v_i e_i$ alors $da_f(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_i} \cdot v_i$
- la matrice de $da_f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$ est $(da_f)_{ij} = \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$ ($f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_L \end{pmatrix}$)
- $da_f = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_i} dx_i$

Preuve: 1) $da f(v) = da f(\sum v_i e_i) = \sum da f(e_i) \cdot v_i = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} v_i$

2) la i -ème colonne de la matrice de $da f$ est $da f(e_i) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$
 $= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_L(a)}{\partial x_i} \end{pmatrix}$

3) $x_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \mapsto x_i$ est une fonction linéaire
 $da x_i(v) = v_i$

On a donc $da f(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} \cdot v_i$ et aussi $\sum \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} da x_i(v)$
 $= \sum \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} v_i \Rightarrow da f = \sum \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} da x_i$

Remarque: 1) Si a n'est pas important, on peut écrire df à la place de $da f$.

2) $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

On imagine que dx_i sont des nombres "infinitésimement petit"
 $df \approx f(x+dx) - f(x)$

Def: Une fonction $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$ (ou $U \rightarrow \mathbb{R}^L$ où $U \subset \mathbb{R}^k$ ouvert) est C^1 si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe $\forall i$ et sont des fonctions continues.

Thm: Si $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$ est C^1 , alors f est différentiable.

C'est-à-dire $da f$ existe $\forall a$

Preuve: (avec $k=2, L=1$)

Soit $a \in \mathbb{R}^2, h \in \mathbb{R}^2 \quad h = h_1 e_1 + h_2 e_2$

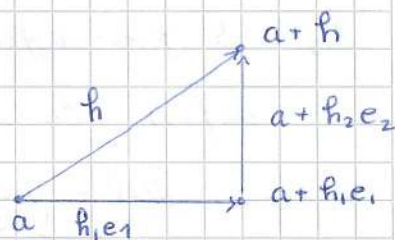
Calculons $f(a+h) - f(a) =$

$= \overset{(1)}{f(a+h_1 e_1) - f(a)} + \overset{(2)}{f(a+h_1 e_1 + h_2 e_2) - f(a+h_1 e_1)}$

On pose $g_1(t) = f(a+te_1) \quad (1) = g_1(h_1) - g_1(0) = h_1 \cdot g_1'(s_1) \quad s_1 \in [0, h_1]$

On pose $g_2(t) = f(a+h_1 e_1 + te_2) \quad (2) = g_2(h_2) - g_2(0) = h_2 \cdot g_2'(s_2) \quad s_2 \in [0, h_2]$

On a $g_1'(s_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+s_1 e_1)$ et pour $g_2'(s_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a+h_1 e_1 + s_2 e_2)$



Analyse I:Preuve: (suite) Nous avons trouvé:

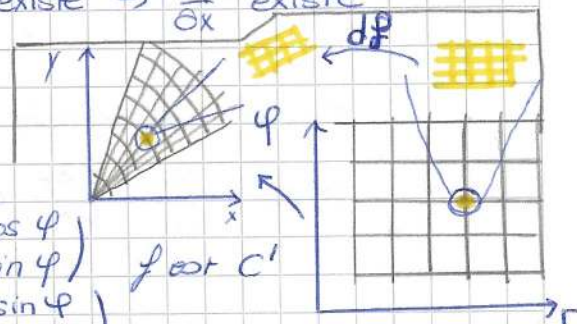
$$\begin{aligned}
 f(a+h) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + s_1 e_1) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + h_1 e_1 + s_2 e_2) h_2 \\
 \Rightarrow f(a+h) &= f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} h_2 + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a + s_1 e_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right) h_1}_{\downarrow \text{ quand } h \rightarrow 0} \\
 &\quad + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a + h_1 e_1 + s_2 e_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right) h_2}_{\downarrow \text{ quand } h \rightarrow 0} \quad \text{avec } |h_2| \leq \|h\|
 \end{aligned}$$

$\downarrow$ quand $h \rightarrow 0$
 $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ est continue
 $\downarrow$ quand $h \rightarrow 0$
 $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ est continue

$= o(\|h\|)$

On a donc $f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} h_2 + o(\|h\|)$
 et $f(a+h) = f(a) + df(h) + o(\|h\|)$

Remarque: f est $C^1 \Rightarrow df$ existe $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ existe $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ existe
 $\downarrow$
 f est continue.

Exemple: (coord. polaire)

$$\begin{aligned}
 f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad f \text{ est } C^1 \\
 df &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (df: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2)
 \end{aligned}$$

Thm: (Règle de la chaîne)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^l & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m \\
 a & \mapsto & b & \mapsto & c \\
 f(a) & & g(b) & &
 \end{array}$$

si df_a et dg_b existent alors $da(g \circ f)$ (existe et) $= dg_b \circ da_f$

("la linéarisation de la composition est la composition des linéarisations.")

Preuve: Soit $h \in \mathbb{R}^k$. On a $g(f(a+h)) = g \circ f(a+h)$

$$\begin{aligned}
 &= g(f(a) + df_a(h) + o(\|h\|)) = g(b) + dg_b(df_a(h) + o(\|h\|)) + o(\|df_a(h) + o(\|h\|)\|) \\
 &= g(b) + dg_b(df_a(h)) + dg_b(o(\|h\|)) + * = g(b) + dg_b \circ da_f(h) + * \\
 &\quad + dg_b(o(\|h\|)) + * = g(b) + dg_b \circ da_f(h) + o(\|h\|)
 \end{aligned}$$

$= o(\|h\|)$

Rappel: $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$, $a \in \mathbb{R}^k$

Si da_f existe ($da_f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$ linéaire) alors on peut la calculer.

$$\text{si } h \in \mathbb{R}^k \quad da_f(h) = \sum_i \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_i} h_i \quad \text{c-à-d. } da_f = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

parce que $dx_i(h) = h_i$ c-à-d la matrice de da_f est $\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_i} \right)_{i,j}$

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{f} \mathbb{R}^L \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \quad a \in \mathbb{R}^k \quad f(a) = b \in \mathbb{R}^L \quad g(b) = c \in \mathbb{R}^m$$

$$da_{(g \circ f)} = da_g \circ da_f \quad (*) \quad [\text{règle de la chaîne}]$$

À mémoriser!

$$(*) \text{ avec les matrices } \frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^L \frac{\partial g_k}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{f} \mathbb{R}^L \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \quad (*) \quad \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial z_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

$$\text{Encore une manière d'écrire } (*) \quad dz_k = \sum_j \frac{\partial z_k}{\partial y_j} dy_j = \sum_{j,i} \frac{\partial z_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i$$

$$dz_k = \sum_i \frac{\partial z_k}{\partial x_i} dx_i \quad \text{et donc } \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial z_k}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

Exemple:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \sin(y_1 + y_2) = z$$

$$z = \sin(y_1 + y_2) = \sin(x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2)$$

$$\begin{aligned} \text{règle de la chaîne : } \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \frac{\partial z}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ &= \cos(y_1 + y_2) \cdot 1 + \cos(y_1 + y_2) \cdot x_2 \\ &= \cos(x_1 + x_2 + x_1 x_2) + \cos(x_1 + x_2 + x_1 x_2) \cdot x_2 \end{aligned}$$

Prop:

Si $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ $U \in \mathbb{R}^k$ ouvert) est différentiable

et si en $a \in \mathbb{R}^k$ f atteint un extremum local, alors $da_f = 0$

$$\text{c-à-d } \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

Analyse I:

Preuve: Si $v \in \mathbb{R}^k$, on pose $g(t) := f(a + tv)$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Vo que f atteint un extremum local en a , g atteint un extremum local en $t=0$, donc $0 = g'(0) = \partial_v f(a) = da f(v)$

Car $da f(v) = 0 \quad \forall v$ on trouve que $da f = 0$ ■

Def: Un point critique de $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est un point $a \in \mathbb{R}^k$ tq $da f = 0$

5.2 Dérivées partielles supérieures

On pose $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_L} = \frac{d}{dx_i} \left(\frac{d}{dx_j} \left(\frac{df}{dx_L} \right) \right)$

Def: Une fonction $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$ est C^n si toutes les dérivées partielles d'ordres $\leq n$ existent et sont continues.

Thm: Si f est C^2 , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Preuve: On peut supposer $L=1$

si $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, il suffit de montrer le théorème pour les f_i , $i=1, \dots, L$

$x \in \mathbb{R}^k$ Si $v \in \mathbb{R}^k$, on pose $\Delta_v f(x) = f(x+v) - f(x)$

On a $\Delta_v \Delta_w f(x) = \Delta_v (f(x+w) - f(x)) = f(x+v+w) - f(x+w) - f(x+v) + f(x) = \Delta_w \Delta_v f(x)$

On a $\partial_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta_{tv} f(x)}{t}$

En particulier, $v = e_i$: $\frac{df(x)}{dx_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta_{te_i} f(x)}{t}$

On va avoir $\frac{d^2 f}{dx_i dx_j} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta_{te_i} \Delta_{te_j} f(x)}{t^2}$ (reste à faire)

si $\tilde{f}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et si on pose $g(t) = \tilde{f}(x + te_j)$

alors $g(t) - g(0) = t \cdot g'(t) \quad t \in [0, t]$

$\Delta_{te_i} \tilde{f}(x) = t \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x + te_j)$

Preuve: (suite)
$$\frac{\Delta t e_i (\overbrace{\Delta t e_j f(x)}^{f'(x)})}{t^2} = \frac{d}{dx_i} \left(\frac{\Delta t e_j f(x + \tilde{t} e_i)}{t} \right) = \frac{\Delta t e_j}{t} \frac{df}{dx_i} (x + \tilde{t} e_j)$$

$$= \frac{\frac{d^2 f}{dx_i dx_j}}{t \rightarrow 0} (x + \tilde{t} e_i + \tilde{t} e_j) \quad t^2 \in [0, \epsilon]$$
 On passe à la limite avec $f \in C^2$

$$\xrightarrow{(x + \tilde{t} e_i + \tilde{t} e_j) \rightarrow x} \frac{d^2 f}{dx_i dx_j} (x)$$

Corollaire: Si $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$ est C^n alors $\forall m \leq n$ les m -ème dérivées partielles de f ne dépendent pas de l'ordre de différentiation.

Thm: (Taylor d'ordre 2)

Si $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^L$ est C^2 , $a \in \mathbb{R}^k$, alors $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} (h_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (h_i, h_j) + o(\|h\|^2)$

Preuve: On peut supposer que $L=1$, posons $g(t) = f(a + t \cdot h)$

Par Lagrange-Taylor: $g_h(1) = g_h(0) + g'_h(0) + \frac{1}{2} g''_h(t_h) \quad t_h \in [0, 1]$

$$g_h(1) = f(a+h) \quad g_h(0) = f(a) \quad g'_h(0) = \sum_{i=1}^k \frac{df(a)}{dx_i} h_i \quad g''_h(t_h) = \sum_{i,j=1}^k \frac{d^2 f(a + t_h h)}{dx_i dx_j} \cdot h_i \cdot h_j$$

On a donc
$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^k \frac{df(a)}{dx_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{d^2 f(a + t_h h)}{dx_i dx_j} h_i h_j$$

$$= f(a) + \sum_i \frac{df(a)}{dx_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{d^2 f(a)}{dx_i dx_j} h_i h_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \frac{d^2 f(a + t_h h)}{dx_i dx_j} - \frac{d^2 f(a)}{dx_i dx_j} \right) h_i h_j$$

$$O(\|h\|^2) \quad (+)$$

$$\|h_i - h_j\| \leq \|h\|^2 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} (0) = 0$$

parce que f est $C^2 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|^2} = 0 \quad \text{c-à-d} \quad (+) = o(\|h\|^2)$

5.3 formes quadratiques

Déf: une forme quadratique en $x_1, \dots, x_k$ est un polynôme quadratique homogène en $x_1, \dots, x_k$.

$$g(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i,j=1}^k B_{ij} x_i x_j, \quad B_{ij} \in \mathbb{R} \text{ on impose } B_{ij} = B_{ji}$$

si B est la matrice (symétrique) avec les éléments B_{ij} et si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ alors $g(x) = x^T B x$.

Exemple:

$$g(x, y) = x^2 + 6xy + 5y^2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_{11} x x = x^2 \quad B_{22} y y = 5y^2$$

$$(B_{12} + B_{21})xy = 6xy \quad B_{12} = B_{21} \quad 2B_{12} xy = 6xy$$

$$g(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Est-ce que $g(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$?

Manière : compléter les carrés.

$$g = (x + 3y)^2 - 4y^2 = z^2 - w^2 \quad z = (x + 3y) \quad w = 2y$$

Non! g n'est pas toujours positif.

Nouvelle base, on peut trouver un changement de base.

Rappel: formes quadratiques: $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \quad B_{ij} \in \mathbb{R}$

$$g(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i,j=1}^k B_{ij} x_i x_j$$

$$g(x) = x^T B x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \quad B = (B_{ij})_{ij} \text{ matrice symétrique } k \times k$$

Thm: Pour toute forme quadratique $g(x) = x^T B x$, il existe une matrice inversible Q (changement de la base de $\mathbb{R}^k$) tq

$$g(x) = \sum_{i=1}^k c_i y_i^2 \quad c_i \in \{\pm 1, 0\} \quad \text{à} \quad x = Q y \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

Preuve: (Algorithmique)

On a $x^T B x = y^T Q^T B Q y$, il faut montrer que pour toute matrice symétrique B , il existe une matrice inversible Q tq $Q^T B Q$ est une matrice diagonale avec 1, -1 ou 0 sur la diagonale.

Pour le faire :

On utilise des matrices élémentaires à plusieurs fois pour diagonaliser B .

Cas 1: (compléter un carré) $B_{11} \neq 0$

faire les opérations élémentaires $L_i \mapsto L_i - \alpha L_1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et $C_i \mapsto C_i - \alpha C_1$ pour annuler B_{1i} et B_{i1}

Cas 2: $B_{11} = 0$ et $B_{1i} \neq 0$ ($i \neq 1$)

les opérations élémentaires $L_1 \mapsto L_1 + L_i$ $C_1 \mapsto C_1 + C_i$
 $\mapsto B_{11}$ devient $\neq 0$ et on revient au cas 1.

Ex: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_1, L_3 = L_3 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 = C_2 - 2C_1, C_3 = C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$
 $\xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

la forme quadratique est maintenant : $q = y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2$

finalement $y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2 = y_1^2 - (\sqrt{3}y_2)^2 + (2y_3)^2$

$$= z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$$

Ex: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 = C_1 + C_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ici $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$
 $\xrightarrow{L_2 = L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 = C_2 - \frac{1}{2}C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{changement convenable}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $y_1^2 - y_2^2$ (signature: $\begin{pmatrix} n_+ & n_- & n_0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$)

Déf. la signature de q ou B est (n_+, n_-, n_0) où $n_+ = \# +1$ sur diag
 $n_- = \# -1$ sur diag et $n_0 = \# 0$ sur diagonale de $Q^T B Q$

Terminologie: q ou B est définie positive si $n_+ = k$ $n_- = 0$ $n_0 = 0$
 c'est-à-dire si $q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

« ————— » définie négative si $n_- = k$ $n_+ = 0$ $n_0 = 0$
 c'est-à-dire si $q(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$

« ————— » semidéfinie positive si $n_- = 0$ si $q(x) \geq 0$
 c'est-à-dire si $q(x) \geq 0 \quad \forall x \neq 0$

« ————— » semidéfinie négative si $n_+ = 0$
 c'est-à-dire si $q(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$

« ————— » indéfinie si $n_+ > 0$ et $n_- > 0$
 c-à-d si $\exists u, v \in \mathbb{R}^k$ tq $q(u) > 0$ et $q(v) < 0$

5.4 Extremum Locaux et Selles.

Rappel: Si $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est C^2 alors $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + r(h)$ où $r(h) = o(\|h\|^2)$

• si $a \in \mathbb{R}^k$ est un extremum local de f , alors a est un point critique, c-à-d $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$

Déf: $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j =: H_a f(h)$ est la forme quadratique Hessienne de f en a . la matrice symétrique $\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$ est la matrice Hessienne de f .

$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0$
 $\parallel \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$

Thm: Soit $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 , $a \in \mathbb{R}^k$ un point critique de f .

- Si $H_a f$ est définie positive, alors $a \in \mathbb{R}^k$ est un minimum local stricte.
- Si $H_a f$ est définie négative, alors a est un maximum local stricte.
- Si $H_a f$ est indéfinie, alors a n'est pas un extremum local, on dit que a est une selle de f .

Prop: Si $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique 2×2 ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)
alors B est définie positive $\Leftrightarrow \det(B) > 0$ et $\alpha > 0$
et B est définie négative $\Leftrightarrow \det(B) > 0$ et $\alpha < 0$
et B est indéfinie $\Leftrightarrow \det(B) < 0$

Preuve: $\exists Q$ inversible tq $Q^T B Q = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ $E_{1,2} \in \{\pm 1, 0\}$

$$\text{Det}(Q^T B Q) = \text{Det}(Q^T) \cdot \text{Det}(B) \cdot \text{Det}(Q) = \text{Det}(B) \cdot \text{Det}(Q)^2$$

$$= E_1 \cdot E_2 \Rightarrow \text{signe}(dE+B) = \text{signe}(E_1 \cdot E_2) = E_1 \cdot E_2$$

Alors $\det(B) < 0 \iff \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = -1 \iff B$ est indéfinie

Alors $\det(B) > 0 \Leftrightarrow E_1 \cdot E_2 = 1 \Leftrightarrow B$ est définie positive
 $E_1 = E_2 = 1$ ou négative
 $E_1 = E_2 = -1$

pour déterminer si B est positive ou négative :

on calcule $(1,0)B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \Rightarrow$ si $\alpha > 0 \Leftrightarrow B$ dif positive
si $\alpha < 0 \Leftrightarrow B$ dif négative

Ex : Trouver les extremums locaux et les selles de la fonction

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto xy(1-x-y)$$

1. les points critiques :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(1-x-y) + xy(-1) = y(1-x-y) - xy = y(1-2x-y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x(1-x-y) - xy = x(1-x-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \wedge \quad 1 - 2x - \frac{2}{4}y = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 1 - x - \frac{4}{2}y = 0$$

cela nous donne $\overset{1}{(0,0)}$; $\overset{2}{(0,1)}$; $\overset{3}{(1,0)}$; $\overset{4}{(1/3, 1/3)}$ les 4 pts critiques

2. Trouver la matrice Hessienne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 - 2x - 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 - 2x - 2y$$

$$\text{matrice} = \begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix} = H_f$$

* max en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

On peut remplacer les valeurs par les points critiques

HP en $(0,0) : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indéfinie $\det(B) < 0$
 $\Rightarrow$ selle en $(0,0)$

4f en (1,0) : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
(1,0) est une selle

H_f en $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

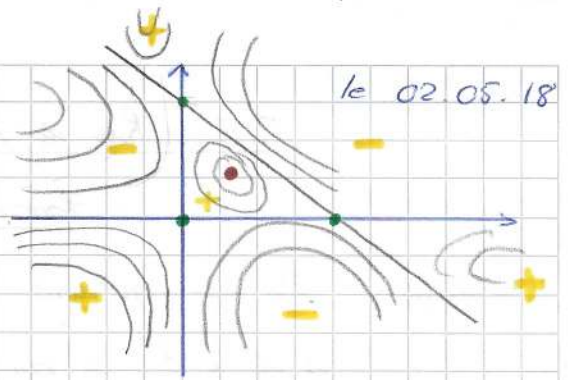
Hf en $(0,0) : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indéfinie $\det(B) < 0$ Hf en $(0,1) : \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(H) = -1$
 $\Rightarrow$ selle en $(0,0)$ indéfinie $\Rightarrow (0,1)$ est une selle
Hf en $(1,0) : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ Hf en $(1/3, 1/3) : \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$ $\det(H) = 1/3 > 0$ p 68
 $(1,0)$ est une selle $\alpha < 0$ déf nég $\rightarrow *$

Analyse I:

Ex: (Suite)

les niveaux de $f: xy(1-x-y)$

• max
• selles



le 02.05.18

Rappel: si $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ est C^2 (Taylor d'ordre 2)

le 08.05.18

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{\sum_{i=1}^k \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i}_{\text{dof}(h)} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j}_{\text{Haf}(h)} + r(h) \quad r(h) = o(\|h\|^2)$$

Thm: Soit $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et $a \in \mathbb{R}^k$, un point critique (ie: $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = 0 \forall i$)

Rappel

Si Haf est définie positive alors a est un minimum local stricte
Si Haf est définie négative alors " — maximum " —
" — " indéfinie — " — une selle

Preuve: Changement de base, pour que $\text{Haf}(h)$ devienne

$$\text{Haf}(h) = \sum_{i=1}^k c_i h_i^2 \quad (h = (h_u)) \quad c_i \in \{1, 0\}$$

Choisissons $\varepsilon > 0$ tq $|r(h)| < 1/4 \cdot \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^k$ tq $\|h\| < \varepsilon$

• Cas 1: Si Haf est définie positif. c-à-d $c_i = 1 \forall i$

c-à-d $\text{Haf}(h) = \sum h_i^2 = \|h\|^2$ et donc si $\|h\| < \varepsilon$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} \text{Haf}(h) + r(h) = f(a) + \frac{1}{2} \|h\|^2 + r(h) > f(a) + \frac{1}{4} \|h\|^2$$

$\Rightarrow a$ est un minimum local stricte.

• Cas 2: Si Haf est définie négative. c-à-d $c_i = -1 \forall i$

c-à-d $\text{Haf}(h) = -\|h\|^2$ et donc si $\|h\| < \varepsilon$, on a

$$f(a+h) < f(a) - \frac{1}{4} \|h\|^2 \Rightarrow a \text{ est un max local stricte.}$$

• Cas 3: Si Haf est indéfinie. c-à-d $\exists i$ tq $c_i = 1$ et $c_j = -1$

$$\forall t \in \mathbb{R}, |t| < \varepsilon, \text{ on a } f(a+te_i) = f(a) + \frac{1}{2} \text{Haf}(te_i) + r(te_i) = f(a) + \frac{1}{2} t^2 \text{Haf}(e_i)$$

$$+ r(te_i) = f(a) + \frac{1}{2} t^2 \underbrace{\text{Haf}(e_i)}_{c_i=1} + r(te_i) = f(a) + \frac{1}{2} t^2 + r(te_i) > f(a) + \frac{1}{4} t^2$$

$$\text{Parcil: } f(a+te_j) = \dots < f(a) - \frac{1}{4} t^2$$

$\Rightarrow a$ n'est ni max, ni min (pas d'extremum en a).

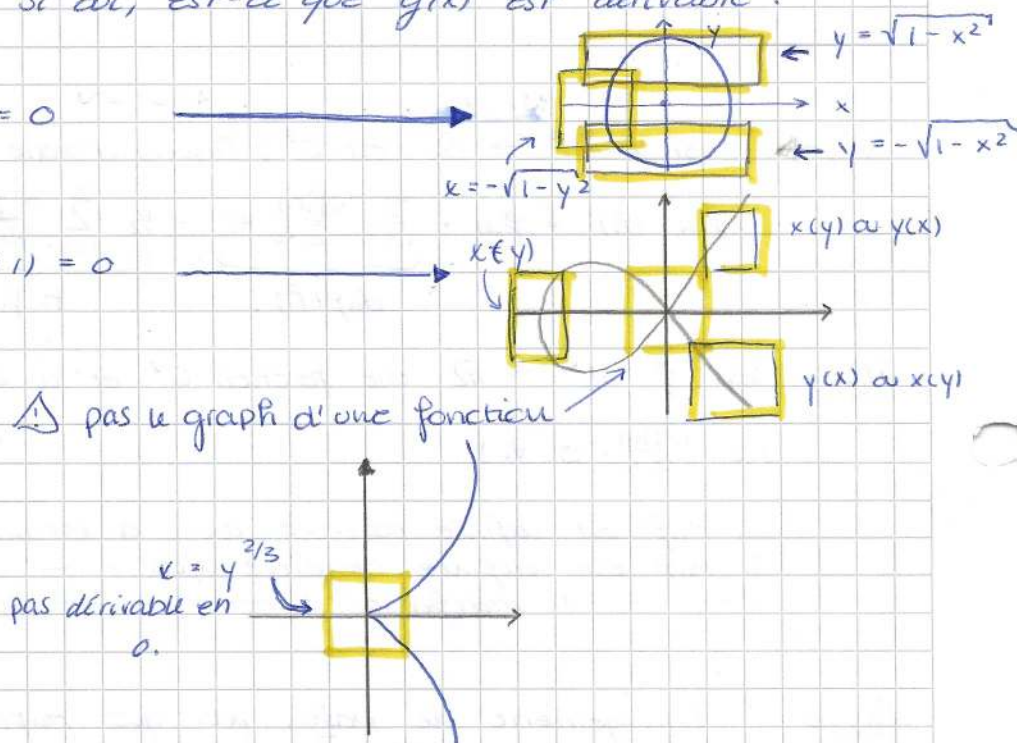
5.5 Thm de la fonction implicite et de la fonction inverse.

Problème: Est-ce qu'une équation $F(x,y) = 0$ définit une fonction y de x ? Si oui, est-ce que $y(x)$ est dérivable?

Ex: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$y^2 - x^2(x+1) = 0$

$y^2 = x^3$



⚠ pas le graph d'une fonction

pas dérivable en 0.

Problème: (en général)

Soit $F: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction, $F = (F_i)_{i=1}^k$, $F_i: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}$

Notons les coordonnées sur $\mathbb{R}^{n+k}$ par $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$.

Est-ce que le sous-ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+k}, F(x,y) = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$

est (localement) le graphe d'une fonction $y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$?

C-à-d Est-ce qu'on peut calculer les $y_1, \dots, y_k$ à partir de $x_1, \dots, x_n$ si on pose $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_k = 0$?

Thm de la fonction implicite:

Avec la notation précédente, si F est C^1 et si $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^k$

$(a,b) \in \mathbb{R}^{n+k}$ tq $F(a,b) = 0$ et si encore, la matrice $k \times k$

$\left(\frac{\partial F_i(a,b)}{\partial y_j} \right)_{i,j=1}^k$ est inversible (c-à-d si $d_{(a,b)} F|_{\mathbb{R}^k}$ est inversible)

alors l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+k}, F(x,y) = 0\}$ est "localement

le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$."

ie: $\exists$ des ss-ensembles ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^k$ tq $a \in U$ et $b \in V$ p 70

Analyse I :

16.08.05.18

Thm : et une fonction $C^1 g: U \rightarrow V$ tq $\{(x,y) \in U \times V, F(x,y) = 0\}$ est le graphe de g (c'est-à-dire $\{(x, g(x)); x \in U\}$)

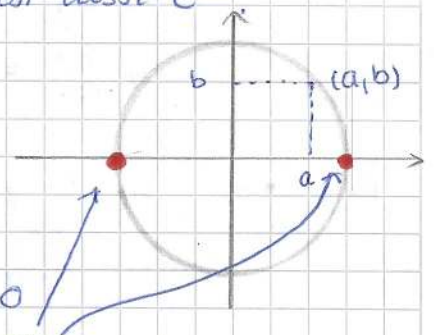
De plus, si F est C^m ($m \geq 1$) alors g est aussi C^m

Exemple : • $n = k = 1, F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \quad (\text{matrice } 1 \times 1 \text{ })$$

$$F(a,b) = 0 : \text{ on demande } \frac{\partial F(a,b)}{\partial y_i} \neq 0$$

les points sur le cercle où $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ (où le thm ne s'applique pas)



• $n = k = 2$

(*) $\begin{cases} u + v = x + y \\ xu + yv = 1 \end{cases}$ Est-ce que (*) donne localement des fonctions $C^1 u(x,y)$ et $v(x,y)$?

Appliquons le théorème: $F_1 = u + v - x - y$ $F_2 = xu + yv - 1$

$$\begin{pmatrix} F_1, F_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Il faut calculer : } \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\text{on a donc } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

Est-ce qu'elle est inversible ? $\det(\dots) = y - x$

$\Rightarrow$ inversible en tout $y \neq x$.

Problème : Calculer les dérivées partielles des fonctions implicites

- C'est-à-dire si $F(x,y) = 0$ donne localement une fonction $y(x) (\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k)$

calculer $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k}, \dots$

Algorithme : • On impose $0 \stackrel{!}{=} dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial y_j} dy_j$

• Il faut calculer dy_j ($j=1, \dots, k$) à partir des dx_i (résoudre système linéaire)

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial F}{\partial y_j} dy_j = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i \quad \text{avec } L = \{1, \dots, k\}$$

• On peut le faire ssi la matrice $(\frac{\partial F}{\partial y_j})_{L,j=1}^k$ est inversible.

Ex : $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $dF = 2x dx + 2y dy \stackrel{!}{=} 0$

$$dy = - \frac{x}{y} dx, \text{ i.e. } \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{x}{y} \Rightarrow y' = - \frac{x}{y} \quad y'' = (y')' = - \frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$$

Algorithme: cas $n=1$:

$$dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial y} dy \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow dy = - \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}} dx_i \quad (\text{car si } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Ex: • si $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ z est vu comme une fonction de x et y

calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$: $2x dx + 2y dy + 2z dz = 0$
 $dz = -\frac{x}{z} dx - \frac{y}{z} dy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{z} \right) = -y \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{z} \right) = y \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = -\frac{xy}{z^3} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

• u, v sont données par $u+v = x+y$, $xu+vy = 1$

Trouver les dérivées partielles de u et v .

$$\begin{aligned} du + dv &= dx + dy \\ xdu + vdx + ydv + vdy &= 0 \end{aligned}$$

$$du = - \frac{(u+y)dx + (v+y)dy}{x-y}$$

$$dv = \frac{(v+x)dx + (v+x)dy}{x-y}$$

En particulier: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+y}{x-y}$

Preuve: (Algo)

Supposons que $y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)$ sont les solutions

de $F(x, y) = 0$. Alors $F(x, y(x)) = 0$ [fonction composée]

$$d(F(x, y(x))) = 0 \quad \text{aussi (règle de la chaîne)} \quad d(F(x, y(x))) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_j} dy_j$$

Rappel: Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est C^1 et si $f'(a) \neq 0$ (pour un $a \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow f$ est strictement monotone près de a . $\rightarrow f$ est inversible près de a .

Analyse I:Thm de la fonction inverse:

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction C^1 , si $a \in \mathbb{R}^n$ est tel que l'appl. linéaire $da_f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est inversible alors f est localement inversible et f^{-1} est C^1 .
 Si $f \in C^m, m \geq 1$, alors $f^{-1} \in C^m$

ici: localement inversible: $\exists$ ss-ens ouvert $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ tq.

$f|_U: U \rightarrow V := f(U)$ est bijective (et on a aussi $f^{-1}: V \rightarrow U$ est C^1 ou C^n).

Ex: • coordonnées polaires $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 $df = \begin{pmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \varphi \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$

$$\det = r \cdot \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi \neq 0 \Leftrightarrow r \neq 0.$$

Preuve:

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, C^1, da_f$ inversible

On définit $F: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Par $F(x, y) = f(y) - x$
 (donc $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = f(y)$)

On utilise le thm de la fonction implicite: $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right)_{ij}$
 est inversible par l'hypothèse (da_f inversible)

$\Rightarrow \exists$ fonction C^1 $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ tq $F(x, y) = 0$
 $\Leftrightarrow y = g(x)$ et donc $g = f^{-1}$
 $\uparrow$
 $x = f(y)$

Preuve: Idée par thm de la fonction implicite.

On utilise la méthode de Newton:

fonction: $F: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ donnée $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+k}$ tq $F(a, b) = 0$

et $\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a, b) \right) \neq 0$. On veut pour $x \in \mathbb{R}^n$ près de a

on cherche $g(x) \in \mathbb{R}^k$ près de b tq $F(x, g(x)) = 0$. On pose $A := \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right)_{ij}$
 $= da_{(a,b)} F|_{\mathbb{R}^k}$

on approxime
par les tangentes
(dérivées)



Preuve: (suite)

On a (pour $h \in \mathbb{R}^k$ petit, x près de a , y près de b)

$$F(x, y+h) \approx F(x, y) + Ah$$

Donc si $h = -A^{-1} \cdot F(x, y)$, on a $F(x, y+h) \approx 0$

On va donc itérer : $y \mapsto y - A^{-1} \cdot F(x, y)$

la limite $=: g(x)$ satisfait $F(x, g(x)) = 0$.

Autrement dit, on cherche le point fixe de l'application

$$y \mapsto y - A^{-1} F(x, y) \quad \left[\text{c'est une contraction (thm de Banach)} \right. \\ \left. \Rightarrow \text{un pt fixe existe et est unique} \right]$$

"□"

5.6 Multiplicateurs de Lagrange.

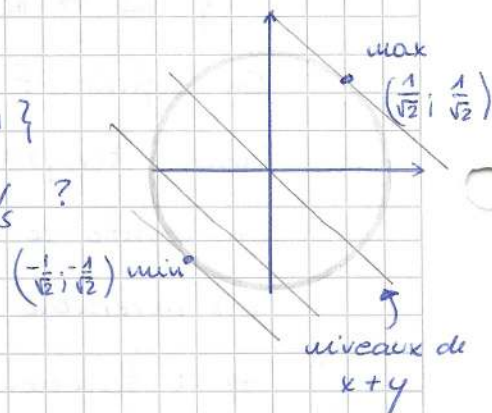
Problème: si $S \subset \mathbb{R}^n$ est "donné par des équations", c-à-d si

$\exists F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tq $S = \{x \in \mathbb{R}^n, F(x) = 0\}$, et si

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, on cherche les extremums de $g|_S: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Ex: $S \subset \mathbb{R}^2$ $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$g(x, y) = x + y$ max et min de $g|_S$?



Thm: multipl. de Lagrange.

Soit $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction C^1 , $S = \{x \in \mathbb{R}^n; F(x) = 0\}$

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 . Si $a \in S$ est un extremum local de $g|_S$ et si $daF: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ est surjective

(c-à-d si la matrice $(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})_{ij}$ est de rang k) alors

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (des multiplicateurs de Lagrange) tq a est un point critique de $g - \lambda_1 F_1 - \dots - \lambda_k F_k$.

toujours satisfait en théorie

Analyse I :

16.09.05.18

Observation: $g|_S = (g - \lambda_1 F_1 - \dots - \lambda_k F_k)|_S$ car $F|_S = 0$

Ex: $S \subset \mathbb{R}^2$ et $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{et} \quad g(x, y) = x + y$$

On cherche les points $a \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $da(g - \lambda F) = 0$

$$d(g - \lambda F) = dx + dy - 2\lambda x dx - 2\lambda y dy \stackrel{!}{=} 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{càd: } (1 - 2\lambda x) dx = 0 \quad (1 - 2\lambda y) dy = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2x} \text{ et } 1 = \frac{x}{y} \Rightarrow (x, y) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \text{ou } \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

qui sont les extrema potentiels de $g|_S$

Rappel: $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ us 2 C^1

16.15.05.18

$S = \{x \in \mathbb{R}^n / F(x) = 0\}$ extrema $g|_S$

Méthode: si $a \in S$ est un extremum local de $g|_S$

et si $daF: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ est surjective, alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

tq a est un point critique de $g - \sum_{i=1}^k \lambda_i F_i$

$$\text{c-à-d } \frac{\partial g(a)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial F_i(a)}{\partial x_j} \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\Leftrightarrow da g(v) = 0 \quad \forall v \text{ tangent à } S \text{ en } a.$$

Ex: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
($n=2, k=1$)

$g(x, y) = x^2 - xy^2$ • min et max sur $g|_S$?

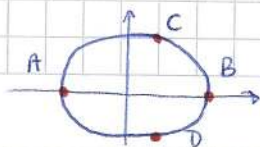
(us 2 existent car g est continue et S compact)

$$\text{On cherche } x, y, \lambda \text{ tq } x^2 + y^2 = 1 \quad \bullet \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x} \quad \bullet \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\text{i.e: } 2 - y^2 = \lambda \cdot 2x \quad -2xy = 2\lambda y$$

$$\text{Il faut résoudre } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2 - y^2 = \lambda \cdot 2x \\ -2xy = 2\lambda y \end{cases} \Leftrightarrow (x + \lambda)y = 0$$

$$\Rightarrow \text{soit } y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{A, B} \\ \Rightarrow \text{soit } x = -\lambda \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0 \quad \text{A} \\ (\lambda = -x) \Rightarrow x = 1/3 \Rightarrow y = \pm \sqrt{8/3} \quad \text{C, D}$$



$$g(A) = g(-1, 0) = 1 = g(B) \quad \max$$

$$g(C) = g(D) = -5/27 \quad \min.$$

Exemple: max et min de $g|_D$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

Soit $a \in S$, on sait $a \in D \cap S \Rightarrow a$ est un pt critique de g .

Points critiques de $g := x^2 - xy^2$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - y^2 \stackrel{!}{=} 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -2xy \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

la valeur $g(0, 0) = 0 \Rightarrow a$ n'est pas un extremum global.

$$\max(g|_D) = 1 \quad \text{et} \quad \min(g|_D) = -5/27.$$

Preuve: du thm

($g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \ C^1, F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k \ C^1, S := \{x \in \mathbb{R}^n, F(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n, a \in S$

un extremum local de $g|_S$, da F surjective $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

tg a est un pt critique de $g - \lambda_1 F_1 - \dots - \lambda_k F_k$.)

• Cas 1: k cas de $F_i = x_i \ (i=1, \dots, k)$

$$\text{c-à-d } S = \{(x_1, \dots, x_n), x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0\}$$

donc $g|_S$ est une fonction de $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$

Si a est un extremum local, on a donc $\frac{\partial g|_S}{\partial x_{k+1}} = 0, \dots$

$$\dots, \frac{\partial g|_S}{\partial x_n} = 0$$

$$\text{(c-à-d } \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \ (\lambda_i = \frac{\partial g|_S}{\partial x_i} = 0, i=1, \dots, k)) \quad \text{tg } \frac{\partial g|_S}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j \right)$$

• Cas 2: F générale.

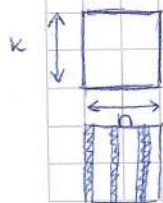
Idee: changer les coordonnées pour se ramener au cas 1

- $F_1, \dots, F_k$ vont être parmi les nouvelles coordonnées.

Lemme: Si da F est surjective, alors $\exists \varphi: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$

où U, V sont ouverts tg φ est C^1 bijective et φ^{-1} est C^1

et tg $F_i = x_i \circ \varphi \quad \forall i=1, \dots, k$

Analyse I:Preuve: Lemme

On suppose daF surjective, donc le rang de la matrice de la matrice de daF $\left[\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1 \dots k \\ j=1 \dots n}} \right]$ est k

donc $\exists k$ colonnes linéairement indépendantes.

Après permutation de $x_1, x_2, \dots, x_n$, on peut supposer

que la matrice $k \times k$ $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots k}$ est inversible.

On pose $\varphi_i = \begin{cases} F_i & \text{si } i \leq k \\ x_i & \text{si } i > k \end{cases}$ $\varphi = (\varphi_i)$ est C^1

On utilise le thm de la fonction inverse:

- Il faut que $da\varphi$ soit inversible: $da\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varphi^{-1}$ existe et est C^1

Preuve: Thm (Suite Cas 2)

On pose $\tilde{g} = g \circ \varphi^{-1}$, c-à-d $g = \tilde{g} \circ \varphi$.

Car a est un extremum local de g , alors $b := \varphi(a)$ est un extremum local de $\tilde{g}$.

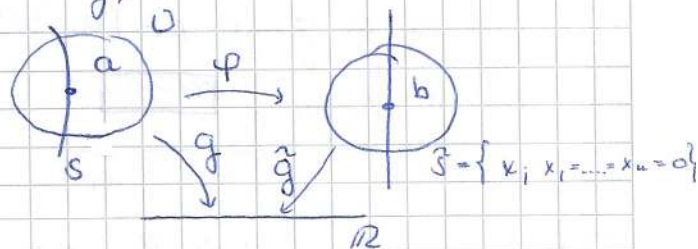
On a que $db\tilde{g}^2 = \sum \lambda_i dbx_i$

(le cas 1)

et donc $db\tilde{g} = da\varphi = \sum \lambda_i dbx_i \circ da\varphi$

$da(\tilde{g} \circ \varphi) = \sum \lambda_i da(x_i \circ \varphi)$

$da g = \sum \lambda_i da F_i$

Résumé: Partie 5.

- 1) Savoir calculer les dérivées partielles et les différentielles (règle de la chaîne)
- 2) Trouver les extrema d'une fonction: points critiques, matrice hessienne, signature, multiplicateur de lagrange.
- 3) Calculer les dérivées d'une fonction implicite.

Chapitre 6 : Intégrales multiples.

6.1 Motivation

$$\int_a^b f(x) dx = \text{l'aire de}$$



Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ alors $\int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = *$
 $*$ = le volume ($n+1$ dimensionnelle) de $\begin{matrix} \text{graph of } f \\ (n=2) \end{matrix}$



Comment définir $\int_A f dx_1 \dots dx_n$?

($n=2$) $A \subset \mathbb{R}^2$ R rectangle

$$\int_A f dx_1 \dots dx_n \approx \sum_{R \subset A} f(p \in \mathbb{R}) \cdot \underset{\text{(volume)}}{\text{aire}(R)}$$

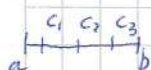
6.2 Définition.

Déf. Un paré (a rectangle n -dim) dans $\mathbb{R}^n$ est un ss-ensemble de la forme $p = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times \dots \times [a_n; b_n]$



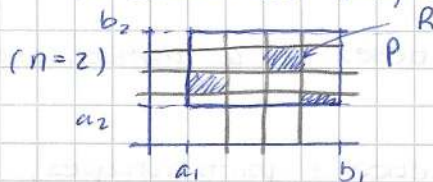
Déf. le volume de P est $\text{vol}_n(P) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

Déf. • Une division d'un intervalle fermé $[a, b]$ est un choix de points



$$a < c_1 < c_2 < \dots < c_k < b$$

• Une division d'un paré $[a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$ est une division de chacun des $[a_i; b_i]$



Notation: D une division

si $R \subset P$ est un petit paré

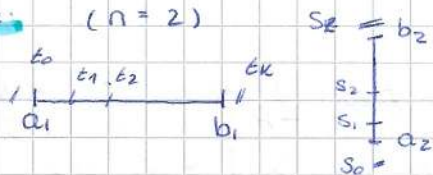
donné par D, on écrit $R \in D$

Analyse I:

le 16.05.18

Proposition: Si D est une division de P alors $\text{vol}_n P = \sum_{R \in D} \text{vol } R$

Preuve: ($n=2$)

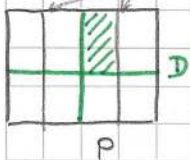


$$\begin{aligned} \text{vol}_2 P &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = \left(\sum_{i=1}^k t_i - t_{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^L (s_j - s_{j-1}) \right) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \dots k \\ j=1 \dots L}} (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1}) = \sum_{R \in D} \text{vol}_2(R) \end{aligned}$$

Déf: Soient $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé, $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et D une division de P . La somme de Riemann supérieure (de f par rapport à D) est $S(f, D) = \sum_{R \in D} \sup_R f \cdot \text{vol}_n R$. La somme inférieure est $s(f, D) = \sum_{R \in D} \inf_R f \cdot \text{vol}_n R$.

Observation: $S(f, D) \geq s(f, D)$ car $\sup f \geq \inf f$

Déf: Si D et D' sont des divisions de P , on dit que D' est un raffinement de D , si D' est obtenue de D en rajoutant des pts de division.



Prop: Si D' est un raffinement de D , alors $S(f, D') \leq S(f, D)$ et $s(f, D') \geq s(f, D)$

Preuve:
$$S(f, D) = \sum_{R \in D} \sup_R f \cdot \text{vol}_n R = \sum_{R \in D} \sup_R f \cdot \sum_{\substack{R' \in D' \\ R' \subset R}} \text{vol}_n R'$$

$$= \sum_{\substack{R' \in D' \\ (R' \subset R) \text{ le } R \in D}} \sup_R f \cdot \text{vol}_n R' \geq \sum_{R' \in D'} \sup_{R'} f \cdot \text{vol}_n R' = S(f, D')$$

Pour $s(f, D)$, pareil

Prop: Si D_1, D_2 sont des divisions de P , alors $S(f, D_1) \geq s(f, D_2)$

Preuve: Soit D une division de P qui est un raffinement de D_1 et D_2 alors on a $S(f, D_1) \geq S(f, D) \geq s(f, D) \geq s(f, D_2)$

Déf: Si $P \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé, $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée,

alors l'intégrale de Riemann supérieure de f est

$$\int_P f dx_1 \dots dx_n := \inf_{D \text{ division de } P} S(f, D)$$

l'intégrale de Riemann inférieure de f est $\int_P f dx_1 \dots dx_n := \sup_D s(f, D)$

(Par la prop précédente on a : $\int_P f dx_1 \dots dx_n \geq \int_P f dx_1 \dots dx_n$)

Si $\int_P f = \int_P f$, on dit que f est intégrable au sens de Riemann

et on pose l'intégrale de Riemann par $\int_P f := \int_P f = \int_P f$

Thm: Si $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est intégrable

Preuve: Plus tard

Déf: Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ss-ensemble borné, c-à-d $\exists$ pavé $P \subset \mathbb{R}^n$

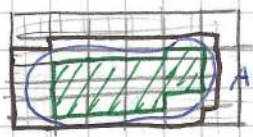
tq $A \subset P$, et si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée, on pose

$$\int_A f := \int_P \tilde{f} \quad \text{où} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

[Exercice, $\int_A f$ ne dépend pas du choix de P]

Déf: Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ss-ensemble borné, alors $\text{vol}_n(A) := \int_A 1$

visualisation:



$$(\tilde{f} = \chi_A)$$

$$S(\tilde{f}, D) = \sum_{\substack{R \in D \\ R \cap A \neq \emptyset}} \text{vol}_n R$$

$$s(\tilde{f}, D) = \sum_{\substack{R \in D \\ R \cap A = \emptyset}} \text{vol}_n R$$

Déf: Un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ borné est négligeable si $\text{vol}_n(S) = 0$

c-à-d si $\forall \epsilon > 0 \exists$ pavés $P_1, \dots, P_k \subset \mathbb{R}^n$ tq $S \subset \bigcup_{i=1}^k P_i$ et tq $\sum_{i=1}^k \text{vol}_n P_i < \epsilon$

Thm: Si $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée tq l'ensemble

$\{x \in P, \text{ où } f \text{ n'est pas continue en } x\}$ est négligeable, alors f est intégrable.

Thm: Si $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est borné et fermé et si $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors le graphe de f $\{(x, f(x)); x \in T\} \subset \mathbb{R}^n$ est négligable.
[Preuve + tard]

Prop:

1. Si A et B sont négligables, alors $A \cup B$ est négligable
2. Si $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$, B est négligable, alors A négligable.

Prop:

1. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et si $\int_A f$ et $\int_A g$ existent alors

$$\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$$
2. si $f \geq g$ alors $\int_A g \leq \int_A f$ (preuve analyse 1)

6.3 Intégrales itérées.

Thm: Si $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ et si $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable alors

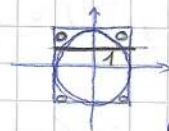
$$\int_P f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{n-1} \dots dx_2 \right) dx_n \right) \leftarrow (*)$$
 si $(*)$ existe

Ex:

$$\int_{0 \leq x, y \leq 1} xy \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dx \right) dy = \int_0^1 y \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{2} y \, dy = \frac{1}{4}$$

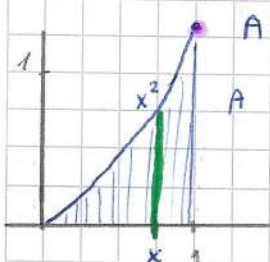
• l'aire du disque $D = x^2 + y^2 \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \, dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \, dy = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y^2} \, dy \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t + \sin^2 t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, dt = \pi \end{aligned}$$



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2(t) \, dt$$

$y = \sin t$



$A \subset \mathbb{R}^2$ où $A: 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1$

d'abord y_1

$$\begin{aligned} \int_A (x+y) \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (x+y) \, dy \, dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20} \end{aligned}$$

- mû qu'avant avec x d'abord.

$$\begin{aligned} \int_A (x+y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{1/y}^1 x+y dx \right) dy = \int_0^1 -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} + y - y^{3/2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - y^{3/2} dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{10+5-8}{20} = \frac{7}{20} \end{aligned}$$

le 22 mai 2018

Rappel: Thm: si $P = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ et si $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable
alors $\int_P f dx_1 \dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f dx_1 \right) \dots \right) dx_n$ si ça existe.

Preuve: On a $P = [a_1, b_1] \times P'$, $P' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un pavé.

On pose $g(x_2, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$, il faut mg $g: P' \rightarrow \mathbb{R}$
est intégrable et que $\int_P f dx_1 \dots dx_n = \int_{P'} g dx_2 \dots dx_n$

Soit D une division de P , ie: on a une division $a_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b_1$
de $[a_1, b_1]$ et une division D' de P'

On va mg $S(f, D) \geq S(g, D') \geq s(g, D') \geq s(f, D)$

Si c'est vrai: On a $\int_P f = \inf_D S(f, D) = \sup_D s(f, D)$
et donc $\int_P f = \inf_{D'} S(g, D') = \sup_{D'} s(g, D') = \int_{P'} g$.

Par montrer 1: $g(x_2, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$
 $\leq \sum_{i=1}^N \sup_{x_1 \in [t_{i-1}, t_i]} f(x_1, \dots, x_n) \cdot [t_i - t_{i-1}]$

$S(g, D') = \sum_{R' \in D'} \sup_{R'} g \cdot \text{Vol}(R') = \sum_{R' \in D'} \sum_{i=1}^N \sup_{R'} f \cdot (t_i - t_{i-1}) \cdot \text{Vol}(R')$
 $= \sum_{R \in D} \sup_R f \cdot \text{Vol}(R) = S(f, D)$

Par la preuve 2 l'idée est la même!

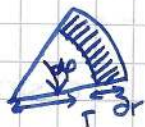


Terminologie: $\det \frac{\partial y}{\partial x} =$ le Jacobien de l'application $x \mapsto y$

6.4 Changement de variables.

Intuition:

$$D: x^2 + y^2 \leq 1 \quad \int_D f(x,y) dx dy \approx \sum_M f(p \in M) \cdot \text{aire } M.$$



À la limite, les zones identiques.

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi \quad 0 \leq r \leq 1 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Théorème:

La formule du changement de variables.

si $P \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé, $P \subset U \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^1 injective sur l'intérieur de P . et si $f: g(P) \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors

$$\int_{g(P)} f = \int_P f \circ g \cdot |\det(dg)| \quad (\text{diff de } g).$$

avec les variables (*) $\int_{g(P)} f(y) dy_1 \dots dy_n = \int_P f(y(x)) \left| \det \frac{\partial y}{\partial x} \right| dx_1 \dots dx_n$
 $g: x \mapsto y.$

Ex:

1) (coordonnées polaires)

$$D: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\begin{matrix} r \\ \varphi \end{matrix} \xrightarrow{g} \begin{matrix} r \cos \varphi = x \\ r \sin \varphi = y \end{matrix}$$

$$\int_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$P: 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq r \leq 1$$

la fonction est injective dans D .

$$\begin{aligned} \int_D x^2 + y^2 dx dy &= \int_P r^2 |\det(dg)| dr d\varphi = \\ &= \int_P r^3 dr d\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\partial g = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\det(\partial g) = r$$



2) le volume du cône

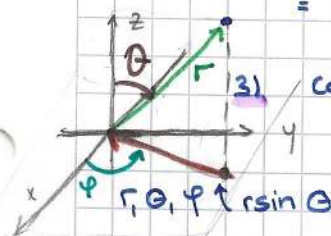
$$\int_D (1-r) dx dy = \int_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} (1-r) \cdot r \cdot dr d\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$= 2\pi \int_0^1 r - r^2 dr = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{3}$$

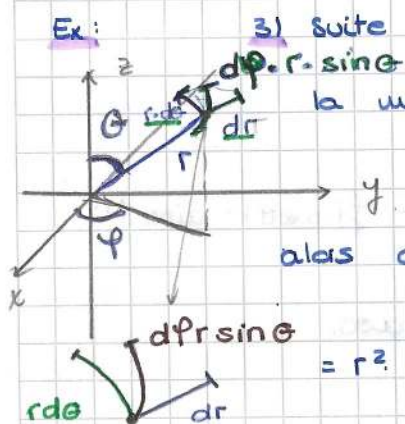
3) coordonnées sphériques



le Jacobien de

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \xrightarrow{g} \begin{matrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} z = r \cos \theta, x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \end{matrix}}$$



3) suite

$dV = r \cdot \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$

la matrice de dg :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

matrice orthogonale?

alors $\det(dg) = r^2 \cdot \sin \theta \cdot \det \begin{pmatrix} \sec \phi & \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}$

$$= r^2 \cdot \sin \theta \cdot |\det(\dots)| = r^2 \sin \theta |\pm 1| = r^2 \sin \theta$$

le volume de la boule de rayon R : $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

$$\{0 \leq \phi \leq 2\pi \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq r \leq R\} = P$$

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} 1 \cdot dx dy dz = \int_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi}} 1 \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3}$$

4) où se trouve le centre de masse d'une demi-boule?



$$C: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ et } z \geq 0$$

$$\int_C z dx dy dz = \int_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2}} r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$z_{cm} = \frac{\frac{\pi R^4}{4}}{\frac{2\pi R^3}{3}} = \frac{3}{8} R$$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = ?$ On définit $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy = I \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = I^2$$

On peut calculer avec les coord. polaires:

$$\int_{\substack{0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 \leq r < \infty}} e^{-r^2} r \cdot dr d\phi = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^\infty e^{-t} dt = \pi = I^2$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Analyse I :

ce qui justifie ex 5 p. 84

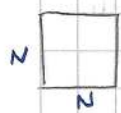
le 23.05.18

et les domaines d'intégration.

Problème: (Ex précédent) les intégrales sont impropres.

$$I(N) := \int_{-N}^N e^{-x^2} dx \quad I := \lim_{N \rightarrow \infty} I(N)$$

$\bullet A(N) := \int_{-N}^N \int_{-N}^N e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = I^2(N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} I^2$



$\bullet B(N) := \int_{x^2+y^2 \leq N^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = 2\pi \int_0^N e^{-r^2} r dr \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \pi$

les domaines d'intégration ne sont pas les mêmes



$$A(N) \geq B(N) \geq A(N/\sqrt{2}) \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $I^2 \quad \quad I^2 \quad \quad I^2$

Volume d'une boule dans $\mathbb{R}^n$.

Déf: Si $s > 0$ (ou si $s \in \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}(s) > 0$), on pose

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

Observation: L'intégrale converge.

Propriétés de Γ :

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$
- $\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^s dx = \int_0^\infty e^{-x} s x^{s-1} dx = s \Gamma(s)$ (par parties)
- $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Par le pt précédent)

Ex: $\Gamma(1/2) = ?$

$$\sqrt{\pi}/2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = 1/2 \Gamma(1/2)$$
$$\Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Ex: le volume d'une boule dans $\mathbb{R}^n$.

$$B_n(R) := \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq R\}$$

déterminant de la jacobienne

$$\operatorname{vol}_n(B_n(R)) = \operatorname{vol}_n(B_n(1)) \cdot R^n \quad (\text{un chgmt de variable équivalent})$$

$$\begin{aligned} (*) &:= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2} dx_1 \dots dx_n = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x_1^2} dx_1 \right) \dots \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x_n^2} dx_n \right) \\ &= \pi^{n/2} \end{aligned}$$

Ex: (Suite)

$$(*) = \int_{0 \leq t \leq e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2}} 1 \, dx_1 \dots dx_n \, dt = \int_0^1 \text{vol}_n(B_n(r(t))) \, dt$$

$$= \text{vol}_n(B_n(1)) \cdot \int_0^1 r(t)^n \, dt = \text{vol}_n(B_n(1)) \int_0^\infty r^n \cdot 2r e^{-r^2} \, dr$$

$r(t) = \sqrt{-\log t}$
 $t = e^{-r^2} \quad dt = -2r e^{-r^2} \, dr$

$$(*) = \pi^{n/2} \quad \text{et } (*) = \text{vol}_n(B_n(1)) \cdot \int_0^\infty 2r e^{-r^2} \cdot r^n \, dr$$

$$\int_0^\infty r^n 2r e^{-r^2} \, dr \underset{x=r^2}{=} \int_0^\infty x^{n/2} e^{-x} \, dx = \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

$$dx = 2r \, dr$$

$$\Rightarrow \text{vol}_n(B_n(1)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

$$\text{et donc } \text{vol}_n(B_n(R)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} R^n$$

$$\text{Si } n \text{ est paire: } \text{vol}_n(B_n(R)) = \frac{\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!} R^n$$

$$\text{si } n=3: \Gamma(3/2 + 1) = 3/2 \Gamma(1/2 + 1) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(1/2) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\text{vol}_3(B_3(R)) = \frac{\pi^{3/2}}{(\frac{3}{2}\sqrt{\pi})} R^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Preuve: Idée de la preuve de la formule du chng de variables

1. Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une applic. linéaire et si $A \subset \mathbb{R}^n$, alors $\text{vol}_n(T(A)) = |\det(T)| \text{vol}_n A$

Parquoi? Il suffit de démontrer par T matrice élémentaire.

$$(\text{Si } T = T_1 T_2 \dots T_k \text{ } T_i \text{ élémentaires } \text{vol}_n T A = \text{vol}_n T_1(T_2 \dots T_k A) = |\det T_1| \text{vol}_n T_2 \dots T_k A = \dots = |\det(T)| \cdot \text{vol}_n A)$$

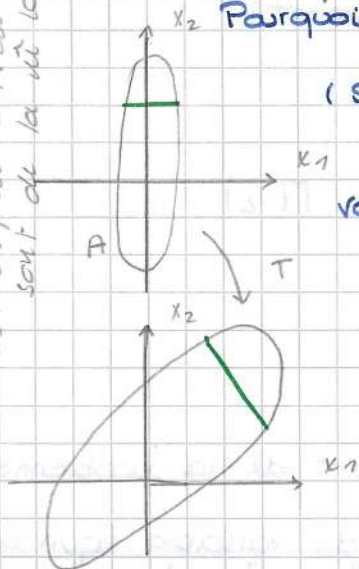
$$\text{vol}_n T A = \int_{TA} 1 \, dx_1 \dots dx_n \underset{\uparrow \text{numéro 1}}{=} \int_A 1 \, dx_1 \dots dx_n \left(\text{si } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

$\det(T) = 1$

$$\text{si } T \text{ est } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{alors } \int_{TA} 1 \, dx_1 \dots dx_n = \lambda \int_A 1 \, dx_1 \dots dx_n$$

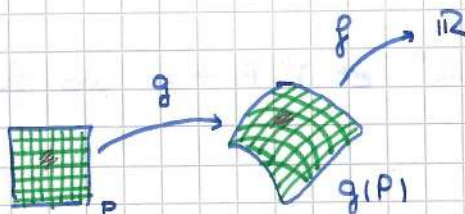
$\det(T) = \lambda.$

Attention, les 2 traits sont de la même longueur.



Analyse I :Preuve: (suite)

2.

 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est C^1

$$g(R) \approx dg(R)$$

$$\int_{g(R)} f \approx \sum_{R \in \mathcal{D}} f(p \in g(R)) \text{vol}_n g(R) \approx \sum_{R \in \mathcal{D}} f(p \in g(R)) |\det(dg)| \cdot \text{vol}_n R$$

$$\approx \int_p f \circ g \cdot |\det dg| \quad (\approx \Rightarrow \text{vrai à la limite})$$

□

le 29.05.18

6.5 Propriétés élémentaires de l'intégrales.

Déf: Si X et Y sont des espaces métriques et si $f: X \rightarrow Y$
 alors f est uniformément continue si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X$
 $d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$

Thm: Si X est un espace métrique compact et $f: X \rightarrow Y$ est continue
 alors f est uniformément continue.

Preuve: Supposons f continue, mais pas unif continue :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in X, (d_X(x, x') < \delta \text{ et } d_Y(f(x), f(x')) \geq \epsilon)$$

Par $n \in \mathbb{N}$ (avec $\delta = 1/n$) $\exists x_n, x'_n \in X$ tq $d_X(x_n, x'_n) < 1/n$
 et aussi $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \epsilon$.

Soit $\tilde{x}_n$, une sous-suite convergente de x_n et $\tilde{x}'_n$ la ss-suite correspondante de x'_n

$$\text{On a } d_X(\tilde{x}_n, \tilde{x}'_n) < 1/n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n =: x = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}'_n$$

$$f \text{ est continue donc } \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_n) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{x}'_n)$$

$$\text{mais } d_Y(f(\tilde{x}_n), f(\tilde{x}'_n)) = d_Y(f(x), f(x)) \geq \epsilon \quad \nabla$$

car la suite va vers 0

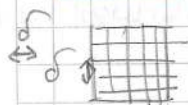
□

Thm: (Rappel)

Soit P un pavé, $P \subset \mathbb{R}^n$ et $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors $\int_P f$ existe.

Preuve: P est compact, donc f est uniformément continue.



Soit D_δ une division de P qui est " δ -fine" c-à-d: $\forall R \in D_\delta$

$\forall x, x' \in R, \|x, x'\| < \delta$

On a donc $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ et donc $\sup_{x \in R} f(x) - \inf_{x \in R} f(x) < \epsilon$

et donc $S(f, D_\delta) - s(f, D_\delta) = \sum_{R \in D_\delta} [\sup_{x \in R} f(x) - \inf_{x \in R} f(x)] \text{vol}(R)$

$\leq \epsilon \cdot \sum_{R \in D_\delta} \text{vol}(R) = \epsilon \text{vol}(P)$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on a que $\inf_D S(f, D) - \sup_D s(f, D) = 0$
 $= \int_P^+ f - \int_P^- f = 0 \Rightarrow \int_P^+ f = \int_P^- f \Rightarrow$ l'intégrale existe.

Rappel: Un ss-ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^n$ est négligable si $\text{vol}_n A = 0$

ic: $\forall \epsilon > 0 \exists$ pavés $P_1, \dots, P_N$ tq $A \subset \bigcup_{i=1}^N P_i$ et $\sum_{i=1}^N \text{vol}(P_i) < \epsilon$

Thm: Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé et $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée

si $\{x \in P; f \text{ n'est pas continue en } x\} \subset P$ est négligable

alors $\int_P f$ existe.

Preuve: f est bornée: $\exists c > 0, \forall x \in P |f(x)| \leq c$



A est négligable, $\forall \epsilon > 0 \exists P_1, \dots, P_N$ tq $A \subset \bigcup_{i=1}^N P_i$ et $\sum \text{vol}(P_i) < \epsilon$

si on gonfle les P_i un peu, on peut supposer $A \subset \bigcup \text{int}(P_i)$

(où $\text{int}(P_i) = P_i \setminus \text{le bord de } P_i$)

$\text{int}(P_i) \subset \mathbb{R}^n$ est un ss-ensemble ouvert, donc $\mathbb{R}^n \setminus \text{int}(P_i)$

fermé et donc $P \setminus \bigcup_{i=1}^N \text{int}(P_i) \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et borné

et donc compact. Car $f: \bigcup_{i=1}^N \text{int}(P_i) \rightarrow \mathbb{R}$ est

continue, elle est aussi uniformément continue.

Preuve: (Suite)

On utilise : f est bornée, unif. cont. sur $P \setminus \bigcup \text{int } P_i$ et

$$\sum \text{vol } P_i \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ si $\mathcal{D}_\delta$ est δ -fine, on a $S(f, \mathcal{D}_\delta) - s(f, \mathcal{D}_\delta) \leq \varepsilon \text{ vol } P + 2C\varepsilon$

Prop: (Rappel)

Si $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ fermé et borné et $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ est continue

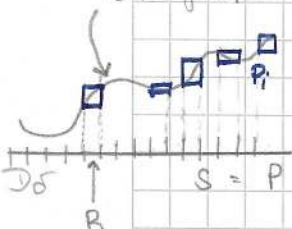
alors le graphe de cette fonction : $\{(x, f(x)); x \in S\} \subset \mathbb{R}^n$

est négligeable.

$\stackrel{!}{G}$

Preuve: S compact, donc f est unif. continue.

G (le graphe) Soit $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ un pavé tq $S \subset P$ et $\mathcal{D}_\delta$ une division δ -fine de P . On a donc $\forall R \in \mathcal{D}_\delta \sup_{x \in R \cap S} f(x) - \inf_{x \in R \cap S} f(x) \stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon$



Pour les pavés P_i tq $G \subset \bigcup P_i$, on prend $R \times [\inf_{x \in R \cap S} f(x), \sup_{x \in R \cap S} f(x)]$
 $R \in \mathcal{D}_\delta$ tq $R \cap S \neq \emptyset$.

Vu que $(*)$, on a $\text{vol}_n(R \times [\inf_{x \in R \cap S} f(x), \sup_{x \in R \cap S} f(x)]) =$

$$= \text{vol}_{n-1}(R) \cdot (\sup_{x \in R \cap S} f(x) - \inf_{x \in R \cap S} f(x)) \leq \varepsilon \cdot \text{vol}_{n-1}(R)$$

et donc $\sum \text{vol}_n P_i \leq \sum_{R \in \mathcal{D}_\delta} \varepsilon \text{vol}_{n-1} R = \varepsilon \text{vol } P \Rightarrow G$ est négligeable

Rappel: • Si A et B négligeable, alors $A \cup B$ négligeable

• si A négligeable et $B \subset A$ alors B négligeable.

Déf: Si X est un espace métrique et $A \subset X$ alors le bord de

A est $\partial A := \{x \in X : \chi_A \text{ n'est pas continue en } x\}$

c-à-d $x \in \partial A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et $B(x, \varepsilon) \cap (X, A) \neq \emptyset$

Remarques :

• Quels A sont "convenables" pour $\int_A f$?

Déf : $A \subset \mathbb{R}^n$ est dit admissible si A est borné et si $\text{Vol}(\partial A) = 0$
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est admissible, si f est bornée et si $\{x \in A, f \text{ pas continue en } x\}$ est négligeable.

Prop : Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est admissible et si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ est admissible
alors $\int_A f$ existe

Preuve : Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé tq $A \subset P$, soit $\tilde{f}: P \rightarrow \mathbb{R}$ $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
alors $\{x \in P, \tilde{f} \text{ n'est pas continue en } x\} \subset \{x \in A, f \text{ pas continue en } x\} \cup \partial A$
où les 2 parties sont négligeables (A et f admissibles) ■

Prop : Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable et $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (bornée) alors
 $\int_A f = 0$

Preuve : $\forall c \in [-C, C]$ $0 = \int_A -C \leq \int_A f \leq \int_A C = C \int_A 1 = C \cdot \text{Vol } A = 0$
 $\Rightarrow \int_A f = 0$ ■

Prop : Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sont admissibles, alors $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ sont admissibles.

Preuve : • $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$



$\Rightarrow \partial(A \cup B)$ est négligeable (Pareil pour les autres)

• $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$

• $\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$ ■

Thm:

Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ sont admissibles et si $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ est admissible, alors
$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$$

En particulier, si $A \cap B = \emptyset$, alors

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Preuve: Soit $A \cup B$, on a $\chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} = 1$

$$\text{donc } f = f \chi_A + f \chi_B - f \chi_{A \cap B}$$

toutes les fonctions sont admissibles

$$\Rightarrow \int_{A \cup B} f = \int_{A \cup B} f \chi_A + \int_{A \cup B} f \chi_B - \int_{A \cup B} f \chi_{A \cap B} = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$$

Résumé partie 6.

Savoir calculer les intégrales :

- Intégration itérée
- Changement de variables (coord. polaires et sphériques)

le calcul de l'intégrale de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

la fonction Γ

